Sèrie 2

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.

2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat. Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.

3. En alguns casos, la solució final pot admetre expressions equivalents. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.

4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.

5. Penalització per errades de càlcul o transcripció:

   - Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.

   - En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.

   - En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.

   - Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

Qüestió 1

Resolució:

a)

Com que $f'(x) = 3x^2 - 12x$, integrant tenim que $f(x) = x^3 - 6x^2 + C$, on C és una constant real.

Ara bé, sabem que $f(x)$ talla l'eix d'abscises en $x = 1$, per tant, $f(1) = 0$. Substituïm:

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + C = 0 \;\rightarrow C = 5$$

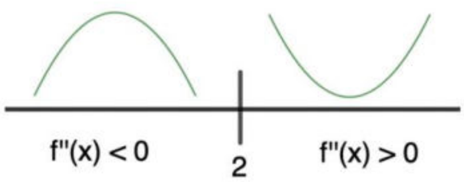
I obtenim $\boxed{f(x) = x^3 - 6x^2 + 5}$.

b)

En el punt d'inflexió s'anul·larà la derivada segona:

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \;\rightarrow x = 2$$

Per estudiar la concavitat de $f(x)$, estudiarem el signe de la derivada segona:



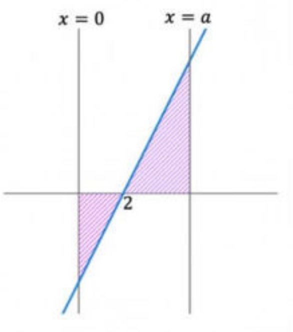
A l'esquerra del punt $x = 2$ la derivada segona és negativa i a la dreta del punt $x = 2$ la derivada segona és positiva.

Per tant:

- En el punt $(2, f(2))$ hi ha un punt d'inflexió.
- La funció té concavitat negativa o és còncava cap avall a l'interval $(-\infty, 2)$
- La funció té concavitat positiva o és còncava cap amunt a l'interval $(2, +\infty)$

c)

La funció $f''(x) = 6x - 12$ talla l'eix d'abscises en $x = 2$ i l'enunciat ens diu que $a > 2$, fets que s'hauran de tenir en compte en el càlcul de les integrals definides:



$$15 = \int_0^2 (12 - 6x)dx + \int_2^a (6x - 12)dx$$

$$15 = [12x - 3x^2]_0^2 + [3x^2 - 12x]_2^a$$

$$15 = 24 - 12 + 3a^2 - 12a - 12 + 24$$

$$3a^2 - 12a + 9 = 0 \ \rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0$$

Resolem l'equació de segon grau:

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = 2 \pm 1 \ \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

Com que $a > 2$, només hi ha una solució: $\boxed{a = 3}$.

Observació: el plantejament de l'àrea també es pot fer a partir de la suma de les àrees dels dos triangles de la figura i no fent esment de cap càlcul integral.

Pautes de correcció:

a) 0,25 pel plantejament que indica com obtenir la funció.

0,25 pel càlcul de la integral.

0,25 pel valor de la constant d'integració.

b) 0,25 per calcular la derivada segona.

0,25 pel punt d'inflexió.

0,25 per l'estudi de la concavitat.

c) 0,25 pel plantejament.

0,25 pel càlcul de les primitives.

0,25 per aplicar correctament la regla de Barrow.

0,25 per trobar el valor del paràmetre.

(En el cas que aquest apartat s'hagi fet sense càlcul integral es repartirà el punt entre els passos que condueixin a la solució final.)

Qüestió 2

Resolució:

a)

La matriu de coeficients i la matriu ampliada, A i A', són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 3 & 2 \\ 2 & a & 1 & a \\ \underbrace{1 \quad 1 \quad 4}_{A} & & & 1 \end{array}\right)}_{A'}$$

En primer lloc, es calcula $det(A)$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4a^2 + 6 + 2 - 3a - a - 16 = 4a^2 - 4a - 8$$

que s'anul·la per als valors de $a = -1$ i $a = 2$.

A continuació s'estudien els tres casos: $a = -1$, $a = 2$ i $a \neq -1, 2$.

CAS $a = -1$

S'obté el sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

On s'observa que sumant la primera més la segona equació s'obté la tercera per tant, el $rang\ (A)$ i el $rang\ (A')$ no seran màxims:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ \underbrace{1 \quad 1 \quad 4}_{A} & & & 1 \end{array}\right)}_{A'}$$

Com que sabem que $det(A) = 0$ i tenim que el menor $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, aleshores el $rang(A) = 2$.

Com que de la suma de la primera més la segona equació s'obté la tercera, tots els menors d'ordre 3 seran nuls, i per al menor d'ordre dos no nul anterior, $rang(A') = 2$.

També es pot argumentar que el $rang(A') < 3$ a partir de trobar que els determinants d'ordre corresponent són nuls.

Per tant, es té que $rang(A) = rang(A') = 2 < 3 = \text{nombre d'incògnites}$.

Per tant $\boxed{\text{és un sistema compatible indeterminat (SCI) amb } 3-2=1 \text{ grau de llibertat}}$.

CAS $a = 2$

En aquest cas, s'obté el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

I en notació matricial s'obté

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right)}_{A'}$$

On s'observa que la primera i la segona columna, dels coeficients de les x i les y, i el vector dels termes independents són iguals. Això ja ens diu que el rang de la matriu ampliada serà el mateix que el de la matriu de coeficients.

Per $a = 2$ sabem que el $det(A) = 0$, i com que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, el $rang(A) = 2$.

Respecte a la matriu ampliada s'observa que no es podrà trobar cap determinant d'ordre 3 no nul ja que el vector de termes independents coincideix amb la primera i segona columna de la matriu A. I, per tant, es té que $rang(A) = rang(A') = 2 < 3 = \text{nombre d'incògnites}$. Per tant, $\boxed{\text{és un sistema compatible indeterminat (SCI) amb } 3-2=1 \text{ grau de llibertat}}$.

CAS $a \neq -1$ i $a \neq 2$

Sabem que $det(A) \neq 0$, per tant, $rang\ (A) = rang\ (A') = 3 = \text{nombre d'incògnites}$ i $\boxed{\text{és un sistema compatible determinat (SCD)}}$.

b)

Per a $a = 2$, s'ha de resoldre el sistema que ja sabem que serà SCI:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

Fem la diferència de les dues primeres equacions i obtenim que $z = 0$.

Substituïm $z = 0$ i ens queda el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

On s'observa que les tres equacions són equivalents i, per tant, es confirma que és un sistema compatible indeterminat.

Si prenem $y = \lambda$, obtenim que les solucions del sistema són de la forma: $\boxed{(1 - \lambda, \lambda, 0)}$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la presentació matricial del sistema.
   0,5 punts per arribar als valors crítics per a la discussió.
   0,75 punts per la discussió dels tres casos (0,25 punts per cada cas).

b) 0,25 punts per observar que és un sistema compatible indeterminat.
   0,75 punts per la solució.

Qüestió 3

Resolució:

a)

Comprovem si la recta r es troba continguda en el pla substituint el punt

$P(2,-1,3) \in r$ en l'equació del pla π: $2-2\cdot(-1)+4\cdot 3-4=12\neq 0$; llavors no està continguda al pla.

Comprovem si la recta és paral·lela al pla. El producte escalar del vector normal al pla i el vector director de la recta hauria de ser nul ja que serien perpendiculars: $(1,3,1)\cdot(1,-2,4)=1-6+4\neq 0$; llavors no són paral·lels.

Així doncs, $\boxed{\text{la recta } r \text{ és secant al pla } \pi}$.

El punt de tall entre la recta i el pla es pot calcular substituint x, y i z de la recta dins l'equació del pla:

$$(2+\lambda)-2(-1+3\lambda)+4(3+\lambda)-4=0$$

$$2+\lambda+2-6\lambda+12+4\lambda-4=0 \rightarrow -\lambda+12=0 \rightarrow \lambda=12$$

El punt de tall és: $(2+12,-1+3\cdot 12,3+12)=\boxed{(14,35,15)}$.

Observació: També es pot plantejar directament el sistema format per la recta i el pla per trobar la intersecció, estudiar-lo i resoldre'l.

b)

L'equació de la recta s perpendicular al pla π i que talli la recta r en el punt P té per vector director el vector normal al pla: $\vec{v}=(1,-2,4)$.

El punt P ha de satisfer que:

$$2+\lambda=5\cdot(-1+3\lambda)\rightarrow 2+\lambda=-5+15\lambda\rightarrow 7=14\lambda\rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$$

Llavors el punt P és $(2+1/2,-1+3/2,3+1/2)=(5/2,1/2,7/2)$ i la recta és:

$$\boxed{(x,y,z)=(5/2,1/2,7/2)+\mu(1,-2,4)}$$

S'accepta l'equació de la recta en qualsevol format que també sigui correcte.

Pautes de correcció:

a) 0,75 punts per la posició relativa de la recta i el pla.
   0,5 punts per calcular el punt de tall de la recta i el pla.

b) 0,25 punts per identificar el vector director de la recta s.
   0,25 punts per formular el càlcul del punt.
   0,25 punts per trobar el punt P.
   0,5 punts per l'equació de la recta.

Qüestió 4

Resolució:

a)

De la funció g tenim la informació següent: $g(0) = 5,\ g'(1) = 0, g''(x) = 2x + 1.$

Per tant, sabem que $g'(x) = x^2 + x + m$ on m és una constant real. Com que $g'(1) = 0$ deduïm que $m = -2$. Aleshores $g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + n$ on n és una constant real. Com que $g(0) = 5$ deduïm que $n = 5$. Així tenim que

$$\boxed{g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 5}$$

Observació: També és totalment correcte el plantejament inicial de

$g(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ i imposant les condicions obtenir els valors respectius de *a*, *b*, *c* i *d*.

b)

La funció f és polinòmica i, per tant, contínua i derivable a tots els nombres reals. Comprovem fàcilment que $\boxed{f(2) = 0}$ i per tant $x = 2$ és una arrel de la funció.

Per comprovar si és estrictament creixent a l'interval indicat calculem la funció derivada $f'(x) = -3x^2 + 12x$, que s'anul·la per a $x = 0$ i $x = 4$.

Com que es tracta d'una paràbola amb coeficient principal negatiu deduïm que la derivada és estrictament positiva en l'interval $(0,4)$ i, per tant, que la funció f és estrictament creixent en aquest interval. Això implica que la funció f no té més arrels en aquest interval i per tant l'àrea A demanada es pot calcular amb l'expressió següent:

$$\boxed{A =} \left| \int_0^2 (-x^3 + 6x^2 - 16)\, dx \right| + \left| \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 16)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{-x^4}{4} + 2x^3 - 16x \right) \Big|_0^2 \right| + \left| \left(\frac{-x^4}{4} + 2x^3 - 16x \right) \Big|_2^4 \right| = 20 + 20 = \boxed{40 \text{ u}^2}.$$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel plantejament.
   0,25 punts per trobar la derivada primera.
   0,25 punts per determinar la constant d'integració m.
   0,25 punts per determinar la constant d'integració n.

b) 0,25 punts per comprovar que la funció té una arrel en $x = 2$.
   0,25 punts per calcular la derivada primera.
   0,25 punts per justificar el creixement estricte de la funció en l'interval donat.
   0,25 punts per escriure les dues integrals definides correctament.
   0,25 punts per calcular la primitiva.
   0,25 punts per la regla de Barrow i resultat de l'àrea.

Qüestió 5

Resolució:

a)

Calculem l'expressió de X^2 en funció dels paràmetres i la igualem a la matriu donada:

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'aquesta igualtat de matrius en sorgeixen les equacions següents:

$$a^2 = 1 \to a = \pm 1$$

$$b^2 = 1 \to b = \pm 1$$

$$c^2 = 1 \to c = \pm 1$$

$$a + b = 0 \to a = -b$$

$$b + c = 0 \to b = -c$$

Llavors, les solucions per a, b i c són:

$a = 1,\ b = -1,\ c = 1$ i $a = -1, b = 1, c = -1$

És a dir, hi ha dues possibles matrius X:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \text{ i } \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

b)

Només cal imposar que

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicant obtenim la següent igual matricial.

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 - \frac{a}{2} & 1 - \frac{a}{2} \\ 0 & b & b - 1 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I igualant terme a terme els elements de la diagonal obtenim

$\frac{a}{2} = 1 \to a = 2;\ \ b = 1;\ \ -c = 1 \to c = -1.$

I també es compleix que $1 - \frac{a}{2} = 0$ per al valor $a = 2$, i $b - 1 = 0$ per al valor $b = 1$.

Així la solució és $\boxed{a = 2, b = 1 \text{ i } c = -1}$.

Observació: De forma alternativa també es pot calcular la matriu inversa X^{-1} i igualar-la a la matriu que ens dona l'enunciat.

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{abc}\begin{pmatrix} bc & 0 & 0 \\ -c & ac & 0 \\ 1 & -a & ab \end{pmatrix}^{t} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Igualant els elements de la diagonal de les dues matrius, tenim que:

$\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \to a = 2;\ \frac{1}{b} = 1 \to b = 1;\ \frac{1}{c} = -1 \to c = -1$

I també són certes les igualtats de la resta de termes de fora de la diagonal.

Així la solució és $\boxed{a = 2, b = 1 \text{ i } c = -1}$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per calcular X^2.
0,25 punts per plantejar el sistema d'equacions que cal resoldre.
1 punt per donar les dues solucions dels tres paràmetres (0,5 per a cada solució).

b) 0,25 punts per plantejar el producte igual a la identitat.
0,25 punts pel producte matricial.
0,25 per plantejar el sistema d'equacions que cal resoldre.
0,25 punts per trobar els valors dels tres paràmetres.

Qüestió 6

Resolució:

a)

L'àrea del trapezi és $A = \frac{3x}{2} \cdot h$ i utilitzant que l'àrea fa 30 m^2 obtenim $\boxed{h = \frac{20}{x}}$.
Observem que podem descomposar el trapezi en un rectangle de base x i altura h i un triangle rectangle d'hipotenusa D i catets x i h. Ara només cal aplicar el teorema de Pitàgores a aquest triangle per obtenir $\boxed{D(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}}$.

b)

Per minimitzar la funció $D(x)$ derivem obtenint

$$D'(x) = \frac{\frac{-800}{x^3} + 2x}{2 \cdot \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}} = \frac{\frac{-400}{x^3} + x}{\sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}}$$

Resolem ara l'equació $D'(x) = 0$ o equivalentment $\frac{-400}{x^3} + x = 0$ i obtenim $x^4 = 400$ i, tenint en compte que només podem prendre les solucions positives, l'únic candidat a extrem és $x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Ara podem observar que en l'interval $(0{,}2\sqrt{5})$ tenim $D'(x) < 0$ i, per tant, D és decreixent i que a l'interval $(2\sqrt{5}, +\infty)$ tenim $D'(x) > 0$ i, per tant, D és creixent, i, per tant, en $x = 2\sqrt{5}$ hi ha un mínim.

Així les dimensions que fan el costat oblic mínim són

$\boxed{x = h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\, m \text{ i } D = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\, m}$.

Observació: Per al càlcul del punt singular, també es pot procedir a derivar la funció $D^2(x) = \frac{400}{x^2} + x^2$, sempre que s'argumenti que tindrà localitzats els extrems en els mateixos valors de les abscisses.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per justificar la relació entre l'altura i la base superior del trapezi.
0,25 punts pel plantejament per trobar la segona relació.
0,25 punts per aplicar correctament el teorema de Pitàgores.
0,25 punts per justificar la relació entre el costat D i la base superior del trapezi.

b) 0,5 punts per la derivada de $D(x)$.
0,25 punts per trobar el punt crític.
0,25 punts per justificar que el punt crític correspon a un mínim.
0,5 punts per donar els valors de h, x i D.

SÈRIE 5

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.

2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat. Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.

3. En alguns casos, la solució final pot admetre expressions equivalents. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.

4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.

5. Penalització per errades de càlcul o transcripció:

    - Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.

    - En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.

    - En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.

    - Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

Qüestió 1

a)

Efectivament, si multipliquem

$$C^3 = C^2 \cdot C = C \cdot C^2 = C \cdot C \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant en multiplicar C per C^2, i a l'inrevés, obtenim la identitat. Amb això provem que la matriu C és invertible i que la seva inversa és C^2

$$C^2 = C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per a calcular C^{2022}, com que 2022=3·674, $\boxed{C^{2022} =} (C^3)^{674} = I_2^{674} = \boxed{I_2}$.

b)

De l'equació $C \cdot X = A - 2 \cdot I_2$, multiplicant ambdós termes per l'esquerra per C^{-1} obtenim:

$$\boxed{X =} C^{-1} \cdot (A - 2 \cdot I_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}$$

Qüestió 2

a)

Aplicarem l'equació: $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$.

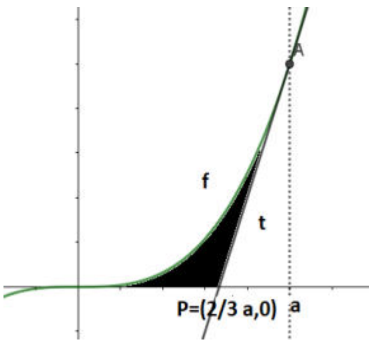
Com que $f(x): y = x^3$, $f(a) = a^3$, $f'(x) = 3x^2$, així que $f'(a) = 3a^2$

i tindrem $y = 3a^2 \cdot (x - a) + a^3 \rightarrow \boxed{t: y = 3a^2x - 2a^3}$.

El punt de tall de la recta t amb l'eix de les abscisses $(y = 0)$ és:

$0 = 3a^2 \cdot x - 2a^3 \rightarrow x = \frac{2a^3}{3a^2} = \frac{2}{3}a$, així que el punt de tall és $\boxed{P = \left(\frac{2}{3}a, 0\right)}$.

b)



L'àrea que ens demanen és la regió ombrejada de la figura i es pot calcular fent l'àrea limitada per la funció f, entre $x = 0$ i $x = a$, menys l'àrea del triangle format per la recta tangent t i l'eix d'abscisses entre $x = \frac{2}{3}a$ i $x = a$.

$A_T = \int_0^a x^3\,dx - A_{triangle} = \left[\frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^a - \frac{\left(a - \frac{2}{3}a\right) \cdot a^3}{2} = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{6} = \frac{a^4}{12}$,

així que $\frac{a^4}{12} = 108 \rightarrow a^4 = 1296 \rightarrow \boxed{a = 6}$

Observació: També es pot calcular mitjançant la integral

$$A_T = \int_0^{\frac{2}{3}a} f(x)dx + \int_{\frac{2}{3}a}^{a} \big(f(x) - t(x)\big)dx.$$

Qüestió 3

a)

Per a discutir el sistema d'equacions lineals calculem el determinant de la matriu dels coeficient A, per a calcular-ne el rang.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = (2m^2 + 2(m-3)) - \big(6m + 2(m-3)\big) = 2m^2 - 6m.$$

$$|A| = 0 \quad \to 2m(m-3) = 0 \quad \to \quad \begin{matrix} m = 0 \\ m = 3 \end{matrix}$$

I per tant podem organitzar la discussió en tres casos.

- Cas I: $\boldsymbol{m \neq 0}$ i $\boldsymbol{m \neq 3}$

  $rang(A) = 3 = rang(A \mid b) =$ nombre d'incògnites i pel Teorema de Rouché-Fröbenius el sistema és compatible i determinat, amb una sola solució, SCD.

- Cas II: $\boldsymbol{m = 0}$

  Com que $|A| = 0$ tenim que $rang(A) < 3$, però $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rang(A) =$ 2.

  La matriu ampliada és:

  $$A \mid b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -6 \\ 2 & -1 & 0 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \underset{f_3 - f_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & -3 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \underset{f_3 + f_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

  Per tant $rang(A) = rang(A \mid b) = 2 < 3$ = nombre d'incògnites. Per tant és un **SCI** (sistema compatible indeterminat amb 3 -2 =1 variable lliure, té infinites solucions).

- Cas III: $\boldsymbol{m = 3}$

  Com que $|A| = 0$ tenim que $rang(A) < 3$, però $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2.$

  La matriu ampliada és:

  $$A|b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \vdots & -6 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \underset{f_3 - f_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 6 \end{pmatrix}$$

  I per tant tenim $rang(A) = 2 \neq rang(A \mid b) = 3$. Per tant, tenim un SI (sistema incompatible), no té solució.

b)

- Si $\boldsymbol{m = 0}$, la matriu ampliada és:

$$A\,|b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\boxed{Recta\ \ r: \begin{cases} x = k \\ y = 2k - 6, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = -2 \end{cases}}$$

Veient els vectors normals dels tres plans: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & -6 \\ 2 & -1 & 0 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} n_{\pi 1} = (2,-1,3) \\ n_{\pi 2} = (0,0,3) \\ n_{\pi 3} = (2,-1,0) \end{matrix}$.

$\boxed{\text{Per tant, els tres plans es tallen en la recta } r.}$

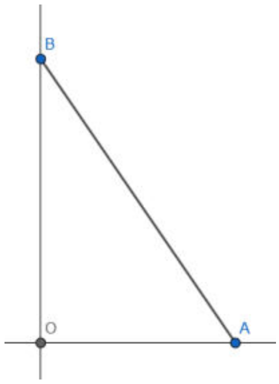
- Si $\boldsymbol{m = 3}$ ja hem vist que el sistema no té solució, és a dir que no hi ha cap punt intersecció dels 3 plans.

  La posició relativa dels tres plans ens la dona els seus vectors normals i els termes independents:

$A \mid b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \vdots & -6 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} n_{\pi 1} = (2,-1,3) \\ n_{\pi 2} = (0,3,0) \\ n_{\pi 3} = (2,-1,3) \end{matrix}$ així que, com que els vectors $n_{\pi 1}$i $n_{\pi 3}$ són proporcionals $\boxed{\text{els plans } \pi_1 \text{ i } \pi_3 \text{ són paral·lels i estan tallats pel pla } \pi_2}$.

Qüestió 4

a)



Sabem que $x + y = 10$

Per tant, $y = 10 - x$

$$Àrea = \boxed{A(x) =} \frac{x(10-x)}{2} = \boxed{\frac{10x - x^2}{2}}$$

$$A'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x$$

$$A''(x) = -1$$

$A' = 0$ quan $x = 5$. $A''(5) = -1 < 0$. Per tant, l'àrea és màxima quan $\boxed{x = 5}$.

En aquest cas l'àrea màxima és

$\boxed{A(5) = 25/2 \text{ unitats de superfície}}$.

b)

Sabem que $x + y = 10$

Per tant, $y = 10 - x$

$$hipotenusa = \boxed{H(x) =} \sqrt{x^2 + (10-x)^2} = \boxed{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}}$$

$$H'(x) = \frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}} = \frac{2x-10}{\sqrt{2x^2-20x+100}}$$

$$H'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 10}{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}} = 0 \Leftrightarrow 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$H''(x) = \frac{2\sqrt{2x^2-20x+100}-(2x-10)\frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}}}{2x^2-20x+100} = \frac{2(2x^2-20x+100)-(2x-10)^2}{\sqrt{(2x^2-20x+100)^3}} = \frac{100}{\sqrt{(2x^2-20x+100)^3}}$$

$H''(5) > 0$ per tant $\boxed{\text{la funció hipotenusa té un mínim quan } x = 5}$.

El valor mínim de la hipotenusa serà $\boxed{H(5) = 5\sqrt{2} \text{ unitats de longitud}}$.

Observació: L'estudiant també pot optar, de forma justificada, per fer mínima la funció $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$, prescindint de l'arrel quadrada, fet que simplifica els càlculs. Això és possible atès que la funció arrel quadrada es monòtona creixent, de manera que no es modifiquen els valors de les abscisses on s'assoleixen els màxims i mínims de la funció.

Qüestió 5

a)

Per a trobar els tres punts alineats calculem els vectors

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,1,0)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1,-1,0)$$
$$\overrightarrow{AD} = D - A = (1,0,0)$$

i com que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} \nparallel \overrightarrow{AD}$, $\boxed{\text{els tres punts alienats són: } A, B \text{ i C}}$.

La recta que defineixen està determinada, per exemple, pel punt $A = (0,0,1)$ i el vector director $\overrightarrow{AB} = (1,1,0)$. Per tant:

$$\boxed{Equació\ contínua:\ r_{AB}: x = y = \frac{z-1}{0}}$$

$$\boxed{Equació\ paramètrica: r_{AB}: \begin{cases} x = k \\ y = k, \\ z = 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}}$$

b)

Busquem el pla π determinat pels punts A, B i D: el punt *A* i els vectors directors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ determinen el pla. Si $X = (x, y, z)$ és un punt genèric del pla π tindrem

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolupant el determinant per Sarrus:

$$\pi: \ -(z-1) = 0$$

Per tant l'equació general del pla és: $\boxed{\pi:\ z = 1}$.

Observació: De forma equivalent es pot trobar l'equació a partir del vector normal al pla $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (0, 0, -1)$.

Qüestió 6

a)

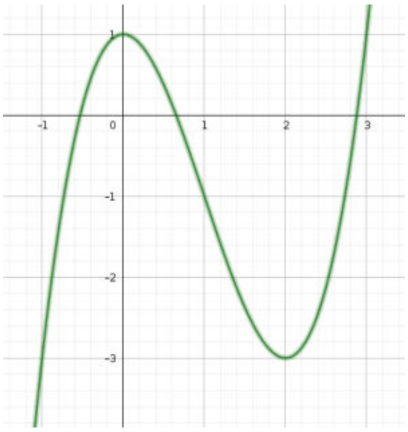
Per a que el programa pugui trobar una solució a una equació $f(x) = 0$ entre a i b cal que la funció $f(x)$ compleixi el teorema de Bolzano, és a dir que la funció sigui contínua en $[a, b]$ i que $f(a)$ i $f(b)$ siguin de signe diferent, és a dir que $f(a)\cdot f(b) < 0$. En aquest cas el teorema de Bolzano ens assegura l'existència d'una arrel dins l'interval (a, b).

En l'exemple concret en el que s'ha aplicat el programa, podem veure que la funció $f(x) = x + ln(x)$ és contínua en l'interval [0,5, 2] ja que és la suma de dues funcions contínues en aquest interval, concretament una funció polinòmica de primer grau i la funció logarítmica que és contínua en tot el seu domini $Dom(ln(x)) = (0, +\infty)$. Veiem també què $f(0{,}5) \cdot f(2) = (0{,}5 + ln(0{,}5)) \cdot (2 + ln(2)) < 0$ la qual cosa demostra que existeix una solució de l'equació en [0,5, 2].

El que fa el programa és trobar el punt mig c entre els valors a i b, i buscar en quin interval canvia de signe la funció; si ho fa a l'interval $[a, c]$ el que fa és prendre com a nou valor de b el punt mig c, i d'aquesta manera tenim un nou interval [a,b] que torna a complir el teorema de Bolzano, ja que la funció canvia de signe i és contínua en aquest nou interval. En el cas en que el canvi de signe es produeixi a l'interval $[c, b]$, el que es fa és prendre com a nou valor a el punt mig c. En aquest cas també teniu un nou interval $[a, b]$ que compleix el teorema de Bolzano. En un i en l'altre cas reduïm a la meitat l'amplada de l'interval inicial. Repetint aquests passos diverses vegades aconseguirem apropar tant com es vulgui els valors de a i b obtenint així una aproximació de l'arrel que, pel teorema de Bolzano, està garantida en aquest interval.

b)

Les funcions polinòmiques són continues, per tant, només necessitem trobar entre quins valors es troben les arrels. Una possibilitat seria començar a fer una taula de valors exhaustiva fins trobar alguns valors en els que la funció canvia de signe i a partir d'aquí contestar la pregunta, però la millor manera de trobar els valors entre els que hi ha solució, i estar segur de que aquesta solució és única és fer una taula de comportament identificant els seus extrems relatius, en aquest cas $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$ d'on veiem que $x = 0$ i $x = 2$.



Fent una taula de comportament:

x	$(-\infty, 0)$	0	(0,2)	2	$(2, +\infty)$
f	creix	1	decreix	-3	creix
f '	+	0	-	0	+

Aquesta taula de comportament ens indica que el polinomi tindrà una arrel entre 0 i 2, ja que en aquest interval la funció és contínua i canvia de signe, i també hi haurà una solució abans de 0 i després de 2. Com que en aquestes tres intervals la funció és monòtona (la derivada ja no canvia de signe) l'arrel serà única en cada un dels intervals. Ara només cal trobar un valor anterior a 0 i un posterior a 2 en els que la funció canviï de signe.

Per exemple per a $x = -1$, $f(-1) = -3 < 0$ i per a $x = 3$, $f(3) = 1 > 0$.

Com a conclusió el programa podrà trobar tres solucions, una en cada un dels intervals $[-1,0]$, $[0,2]$ i $[2,3]$.