SÈRIE 5.

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar fraccions de 0,25 punts en els diferents apartats i després arrodonir la suma total.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.

QÜESTIONS

1. Calculeu el valor de la integral següent:

$$\int_0^3 \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1}\,dx\,.$$

SOLUCIÓ.

[2 punts] Es pot considerar immediata:

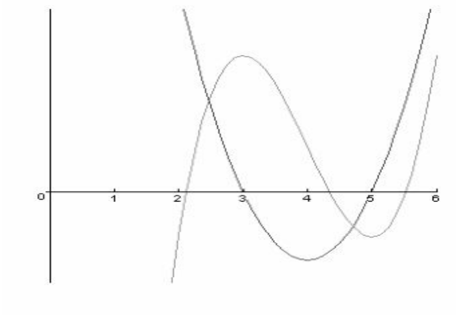
$$\int_0^3 \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1}\,dx = \int_0^3 dx + \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = x\Big|_0^3 + 2\sqrt{x+1}\Big|_0^3 = 3+(4-2)=5\,.$$

O es pot fer un canvi de variable:

$$u=\sqrt{x+1};\; x+1=u^2;\quad dx = 2u\,du;\quad \begin{cases} x=0 \;\Rightarrow\; u=1 \\ x=3 \;\Rightarrow\; u=2. \end{cases}$$

$$\int_0^3 \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1}\,dx = \int_1^2 \frac{u^2+u}{u^2}\cdot 2u\,du = 2\int_1^2 (u+1)\,du = 2\cdot\left[\frac{u^2}{2}+u\right]_1^2 = 5.$$

2. La gràfica següent correspon a una funció $f:[2,6] \to R$ derivable i amb derivada contínua. Feu un esbós de la gràfica de $f':(2,6) \to R$ tot justificant-ne el perquè.



SOLUCIÓ.

[2 punts] La gràfica d'una funció més o menys en forma de paràbola en forma de $\cup$, que sigui decreixent a $[-\infty,4]$ i creixent a $[4,+\infty]$; que s'anul·li a 3 i a 5 i que tingui un mínim a 4.

Puntueu 1 punt per la forma parabòlica correcta i l'explicació del creixement-decreixement; 0,5 punts pels zeros a x = 3 i a x = 5 i 0,5 punts pel mínim a x = 4.

3. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es demana:

a) trobeu una matriu X tal que $A \cdot X = B$;
b) calculeu B^{100}. Raoneu la resposta.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** Podem procedir de dues maneres:

Observant que A és invertible, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$,

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

O bé podem fer $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i llavors

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2c & = & 1 \\ -2a + c & = & 1 \\ 3b - 2d & = & 1 \\ -2b + d & = & 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -3 \\ c = -5 \\ d = -5 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

b) **[1 punt]**

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}; \quad \cdots \quad B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}; \quad \Rightarrow B^{100} = \begin{pmatrix} 2^{99} & 2^{99} \\ 2^{99} & 2^{99} \end{pmatrix}.$$

Puntueu 0,25 o 0,5 punts si calculen correctament algunes potències de B però no arriben a veure el patró general.

4. Donats els vectors $\vec{u}=(1,2)$ i $\vec{v}=(-3,1)$, es demana:
a) comproveu que $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen una base de l'espai vectorial dels vectors del pla;
b) trobeu els components del vector $\vec{w}=(-1,5)$ en la base $\{\vec{u},\vec{v}\}$.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** Un conjunt de vectors de R^2 són base quan són linealment independents i formen un sistema de generadors. Si el nombre de vectors coincideix amb la dimensió de l'espai, com en aquest cas, només cal comprovar una d'aquestes condicions. Aquí, (1,2) i (-3,1) són linealment independents perquè la matriu
$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ té rang 2 que es pot veure o bé reduint-la per Gauss,
$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ o bé perquè el determinant $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$

Si només comproven una de les dues condicions sense més comentaris, traieu 0,25 punts.

b) **[1 punt]** Hem de trobar *a* i *b* tal que $\vec{w}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}$. Són les solucions del sistema:

$$\begin{cases} a-3b & = & -1 \\ 2a+b & = & 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1. \end{cases}$$

Per tant, $\vec{\omega}=(2,1)$ en base $\{\vec{u},\vec{v}\}$.

PROBLEMES

5. Considereu la funció polinòmica de tercer grau, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a \neq 0)$. Es demana:
a) trobeu els valors de a, b, c i d que fan que $f(x)$ talli l'eix OX en els punts $x = 0$ i $x = 1$ i que tingui un mínim relatiu en el punt $x = 0$;
b) feu un esbós de la gràfica de la funció que heu trobat, tot acabant de calcular els elements necessaris per dibuixar-la.

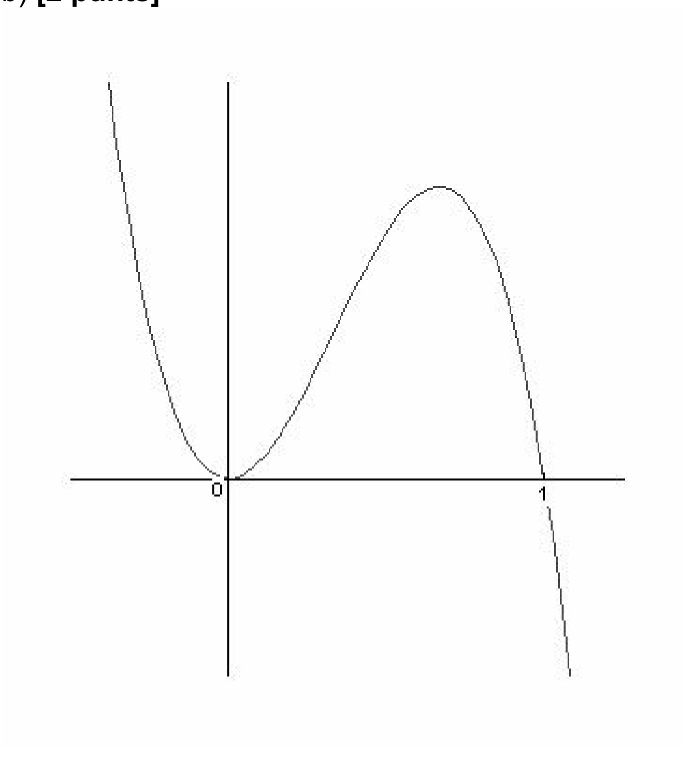
SOLUCIÓ.

a) **[2punts]** Imposant les condicions de l'enunciat,

$$\begin{cases} f(0) = 0 & \Rightarrow & d = 0 \\ f(1) = 0 & \Rightarrow & a + b + c + d = 0 \\ f'(0) = 0 & \Rightarrow & c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a \\ b = -a \\ c = 0 \\ d = 0. \end{cases}$$

Així la funció és $f(x) = ax^3 - ax^2$. Derivant, $f''(0) = -2a \neq 0$ i com que sabem que a *x*=0 hi ha un mínim, $f''(0) > 0 \quad \Rightarrow a < 0.$

b) **[2 punts]**



La funció queda com $y = ax^3 - ax^2$, la gràfica de la qual és a la figura.
Talls amb eixos a (0,0) i $(1,0)$; tenim un mínim relatiu a (0,0); a $\left(\frac{1}{3}, \frac{-2a}{27}\right)$ hi trobem un punt d'inflexió i a $\left(\frac{2}{3}, \frac{-4a}{27}\right)$ un màxim relatiu.

Puntueu 1 punt per la forma correcta passant per (0,0) i (1,0); 0,5 punts pel màxim i 0,5 punts pel punt d'inflexió. Si algun estudiant dibuixa la gràfica correctament per un valor concret de a, se li dóna per bo.

6. Considerem les rectes

$$r: \ \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2} \quad \text{i} \quad s: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1-4t \\ z = 5+t. \end{cases}$$

a) Estudieu la seva posició relativa.
b) Trobeu l'equació del pla que conté a *s* i és paral·lel a *r*.
c) Calculeu la distància entre *r* i *s*.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** No són paral·leles perquè els vectors directors, (-2,1,-2) i (3,-4,1) són linealment independents. Per veure si es creuen o es tallen, mirem el rang dels tres vectors (-2,1,-2), (3,-4,1) i (2-1,-1-(-1),0-5):

la matriu $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ té rang 3 perquè $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} \neq 0.$

Per tant, les rectes es creuen a l'espai.

b) **[1,5 punts]** L'equació vectorial del pla demanat és:

$$(x,y,z) = (1,-1,5) + a\cdot(-2,1,-2) + b\cdot(3,-4,1) \text{ amb } a,b \in R.$$

La general és

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 3 \\ y+1 & 1 & -4 \\ z-5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \Rightarrow \quad 7x+4y-5z+22=0.$$

És suficient obtenir una de les equacions.

c) **[1,5 punts]** La distància entre les dues rectes ara es pot trobar com la distància d'un punt qualsevol de la recta *r*, per exemple (2,-1,0), al pla $7x+4y-5z+22=0$:

$$\left|\frac{7\cdot 2+4\cdot(-1)+22}{\sqrt{7^2+4^2+(-5)^2}}\right| = \frac{32}{\sqrt{90}} = \frac{32}{3\sqrt{10}} = \frac{16\sqrt{10}}{15} \text{ unitats de distància.}$$