SÈRIE 3.

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar fraccions de 0,25 punts en els diferents apartats i després arrodonir la suma total.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.

QÜESTIONS

1. En un sistema hi ha, entre d'altres, aquestes dues equacions: $x+2y-3z=5$ i $2x+4y-6z=-2$. Què podem dir de les solucions del sistema?

SOLUCIÓ [2 punts] El rang de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ és 1, mentre que el rang de la matriu $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -6 & -2 \end{array}\right)$ és 2. Això ens diu que les dues equacions donades són incompatibles. Qualsevol sistema que les contingui, també serà incompatible.

2. Considereu els vectors de R^3:

$$\vec{v}_1=(-1,3,4),\ \vec{v}_2=(2,-1,-3) \text{ i } \vec{v}_3=(1,2k+1,k+3).$$

a) Trobeu l'únic valor de k per al qual aquests vectors **no** són una base de R^3.
b) Per un valor de k diferent del que heu trobat a l'apartat a), quins són els components del vector $\vec{w}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$ en la base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$?

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt**] Tres vectors de R^3 no són base si no són linealment independents. Això passarà quan el determinant format pels tres vectors valgui 0:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2k+1 & k+3 \end{vmatrix} = 5k-15=0 \Leftrightarrow k=3.$$

Al mateix resultat s'arriba imposant que el rang de la matriu formada pels tres vectors, no sigui 3:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2k+4 & k+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 2k+4 & k+7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2k+4 & k+7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -k+3 \end{pmatrix}$$

b) **[1 punt**] Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ és una base, el vector $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ té clarament els components $(1,1,1)$.

3. Trobeu la distància entre la recta $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+2}{3}$ i el pla $\pi:\ 2x-3y+3z+5=0$.

SOLUCIÓ [2 punts] Primer de tot estudiem la posició relativa de recta i pla. Observem que el vector director de la recta, $(2,-3,3)$, és el vector normal del pla! Per tant, la recta és perpendicular al pla. La distància de la recta al pla és, doncs, 0.

4. Donats els punts $A=(1,0,0)$ i $B=(0,0,1)$ es demana:

a) trobeu un punt C sobre la recta d'equació paramètrica $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$ que faci que el triangle ABC sigui rectangle en C;

b) trobeu l'àrea del triangle ABC.

SOLUCIÓ

a) **[1 punt**] El punt $C=(1,1+\lambda,1+\lambda)$. Per tal que el triangle ABC sigui rectangle en C, els vectors $\overrightarrow{CA}=(0,-1-\lambda,-1-\lambda)$ i $\overrightarrow{CB}=(-1,-1-\lambda,-\lambda)$ han de ser ortogonals, és a dir

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (1+\lambda)^2+\lambda(1+\lambda)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=-1;\quad \lambda=-\frac{1}{2}.$$

Això ens dóna dos punts solució: $C=(1,0,0)$ i $C=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. El primer punt, clarament és igual a A i fa que no hi hagi cap triangle. La única solució és, doncs, $C=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

b) **[1 punt]** Els catets del triangle seran $\overrightarrow{CA} = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ i $\overrightarrow{CB} = \left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

L'àrea serà, doncs, $\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ unitats d'àrea.

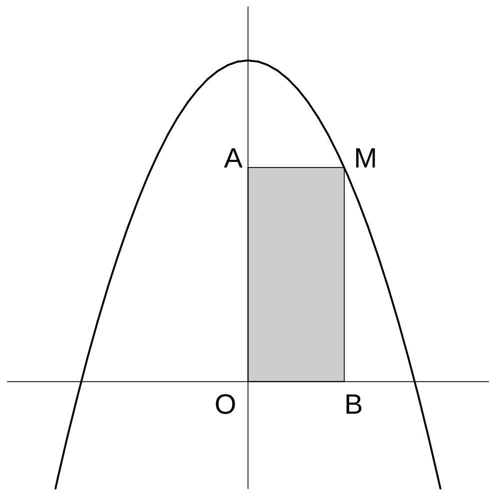
PROBLEMES

5. Considereu la funció $f(x) = 3 - x^2$ i un punt, M, de la seva gràfica situat al primer quadrant ($x \geq 0, y \geq 0$). Si pel punt M tracem paral·leles als eixos de coordenades, la seva intersecció amb OX i OY determinen dos punts, A i B respectivament. Es demana:

a) feu un gràfic dels elements del problema;
b) trobeu les coordenades del punt M que fa que el rectangle $OAMB$ tingui àrea màxima.

SOLUCIÓ

a) **[1 punt]**



b) **[3 punts]** Sigui $M = \left(a, 3 - a^2\right)$, amb $a \geq 0$. L'àrea del rectangle $OAMB$ és $S = a \cdot \left(3 - a^2\right) = 3a - a^3$. Per trobar-ne el mínim, resolem $S' = 0$, és a dir, $3 - 3a^2 = 0$. Tenim que $a = \pm 1$. Ens quedem només amb la solució positiva, $a = 1$. Estem en un mínim perquè $S''(1) = -6 > 0$. Així, el punt M demanat és $(1, 2)$.

Puntueu amb 1 punt el trobar correctament la funció àrea. Puntueu amb 2 punts el trobar el mínim i la comprovació de mínim. Penalitzeu amb 0,5 punts els que oblidin donar com a resposta les coordenades de M.

6. Considereu la funció

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+b & \text{si} \quad x<0 \\ ae^{bx} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

on a i b són nombres reals. Es demana:

a) Quina condició han de complir a i b per tal que f sigui contínua a tot *R*?

b) Trobeu els valors de a i b pels quals f sigui contínua però no derivable a tot *R*.

c) Per $a=1$ i $b=1$, calculeu $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** Tant x^2+x+b com $a\cdot e^{bx}$ són funcions contínues en tot *R*. Per tant, l'únic punt on f pot tenir una discontinuïtat és a $x=0$. Estudiem els límits laterals en el punt 0:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=b\,;\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=a\,.$$

Per tal que f sigui contínua a $x=0$ cal, doncs, que $a=b$.

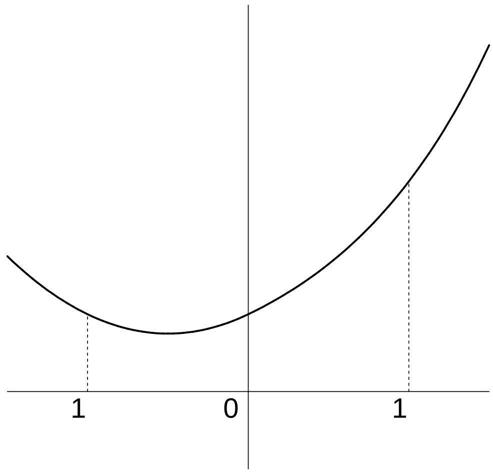
Penalitzeu amb 0,5 els que no comentin res de la continuïtat de f fora de $x=0$.

b) **[1 punt]** Si derivem f, obtenim:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x<0 \\ abe^{bx} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}.$$

Per tal que f' existeixi en el punt $x=0$, cal novament que $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)$. O sigui, cal que $1=ab$. Com que la condició de continuïtat és que $a=b$, tenim que $a^2=1 \Leftrightarrow a=\pm 1$. Per tant, hi ha dues parelles de valors que farien f contínua i derivable: $a=b=1$ o bé $a=b=-1$. Qualsevol parell de valors $a=b\neq\pm 1$ resolen la qüestió.

c) **[2 punts]**



$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & \text{si} \quad x<0 \\ e^x & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\left(x^2+x+1\right)dx+\int_{0}^{1} e^x\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{0}+\left[e^x\right]_0^1=\frac{5}{6}+e-1=e-\frac{1}{6}\text{unitats d'àrea.}$$

Puntueu 1 punt pel plantejament correcte i 0,5 punts per cada una de les dues integrals.