SÈRIE 2

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera que es compensin els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i,* a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1.- Trobeu l'equació del pla perpendicular a la recta $r:\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ que passa per l'origen de coordenades.

Primerament, cal obtenir el vector director de la recta que ha d'actuar com a vector de coeficients o vector perpendicular del pla buscat.

Això es pot fer escrivint la recta d'alguna forma que el posi de manifest. Per exemple, de la segona equació, $y=3-2x$.
Substituint a la primera i aïllant *z*, $z=1-x-y=1-x-3+2x=x-2$.
Llavors, l'equació de la recta es pot escriure

$$(x,y,z)=(0,3,-2)+x(1,-2,1)$$

i el vector buscat és $(1,-2,1)$.

També es pot calcular a partir del producte vectorial dels vectors de coeficients dels plans que defineixen la recta.

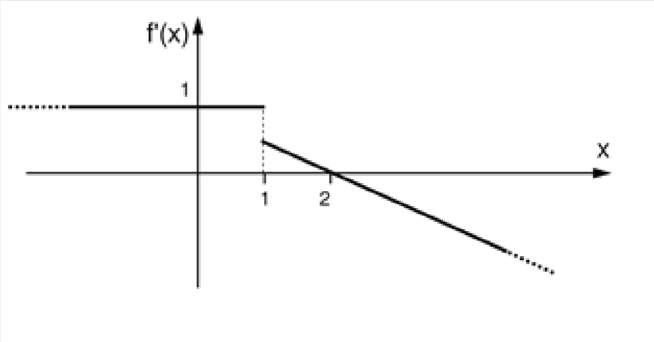
$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,2,-1).$$

Finalment, com que el pla demanat ha de passar per l'origen, la seva equació és

$$x-2y+z=0 .$$

PUNTUACIÓ:
1 punt per obtenir el vector de coeficients de forma correcta.
1 punt per escriure correctament l'equació del pla.

2.- La funció derivada $f'(x)$ de certa funció contínua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix.



a) Digueu si és derivable en tots els punts de $\mathbb{R}$ i per què.

b) Estudieu el creixement i el decreixement de *f(x)*.

c) Trobeu si *f(x)* té algun extrem relatiu i, si és així, per a quin valor de *x* i de quin tipus.

d) Sabent que $f(0)=1$, calculeu el valor de $f(1)$.

Justifiqueu totes les respostes.

a) La funció deixa de ser derivable quan $x=1$ ja que la derivada no està definida en aquest punt. Per tant, és derivable per a tots els reals excepte $x=1$.

b) La funció creix pels valors de *x* amb derivada positiva, és a dir, quan $x\in(-\infty,2)$. Decreix on la derivada és negativa, per tant, quan $x\in(2,+\infty)$.

c) Per a $x=2$ la derivada val zero i la funció passa de créixer a decréixer; és a dir, per a aquest valor de *x* la funció té un màxim relatiu.

d) L'àrea sota la funció derivada des de $x=0$ fins a $x=1$ val 1 per tant

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(1)-f(0)=1\to f(1)=1+f(0)=2.$$

També es pot avaluar $f(1)$ obtenint prèviament la funció primitiva per $x<2$.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int dx = x+C$, i com $f(0)=1\to C=1$ i $f(1)=2$.

PUNTUACIÓ:
0.5 punts cada apartat.
Les respostes han de ser, sobretot, justificades. No compteu cap resultat que no estigui justificat.

3.- Calculeu els valors del paràmetre a , $a \neq 0$, que fan que les tangents a la corba d'equació $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ en els punts d'inflexió siguin perpendiculars.

Primerament es calculen les derivades primera i segona de la funció $f(x) = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ que defineix la corba donada.

$$f'(x) = 4ax^3 + 6ax^2 - a, \quad f''(x) = 12ax^2 + 12ax .$$

La condició de punt d'inflexió és que la derivada segona s'anul·li,

$$12ax^2 + 12ax = 0 \to 12ax(x+1) = 0 ,$$

que proporciona les solucions $x = 0$ i $x = -1$. En tots dos casos es pot comprovar que la derivada tercera no és nul·la i, per tant, corresponen a abscisses de punts d'inflexió.

Els pendents de les rectes tangents en els punts d'inflexió valen

$$f'(0) = -a \text{ i } f'(-1) = a .$$

Si les rectes han de ser perpendiculars s'ha de verificar que el producte dels seus pendents valgui -1, és a dir

$$-a \cdot a = -1 \to a = \pm 1.$$

PUNTUACIÓ:
0.5 pel càlcul correcte de les dues derivades.
0.5 per l'obtenció de les abscisses dels punts d'inflexió. Si no comproven que les derivades terceres són diferents de zero no penalitzeu.
0.5 per obtenir correctament els pendents de les tangents.
0.5 per aplicar correctament alguna condició de perpendicularitat.
Pot passar que alguns estudiants obtinguin les equacions completes de les tangents, en aquest cas, si ho fan malament no penalitzeu. Comproveu només que els pendents són els que toquen.

4.- Trobeu els punts de la recta $r: x - 1 = y + 2 = z$ que equidisten dels plans $\pi_1 : 4x - 3z - 1 = 0$ i $\pi_2 : 3x + 4y - 1 = 0$.

Un punt qualsevol de la recta es pot expressar com $(z+1, z-2, z)$. Llavors, igualant la distància d'aquest punt a cada un dels plans,

$$\left| \frac{4(z+1) - 3z - 1}{\sqrt{16+9}} \right| = \left| \frac{3(z+1) + 4(z-2) - 1}{\sqrt{16+9}} \right| \to z + 3 = \pm(7z - 6) .$$

Amb el signe positiu: $z + 3 = 7z - 6 \to -6z = -9 \to z = 3/2$ i el punt és

$$(5/2, -1/2, 3/2) .$$

Amb el signe negatiu: $z + 3 = -7z + 6 \to 8z = 3 \to z = 3/8$ i el punt és

$$(11/8, -13/8, 3/8) .$$

PUNTUACIÓ:
0.5 punts per parametritzar correctament un punt qualsevol de la recta.
0.5 per plantejar bé la igualtat de distàncies.
0.5 punts per cada una de les solucions.

PROBLEMES

5.- Un magatzem té forma de prisma recte de base quadrada i volum 768 m^3. Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val 100 unitats per m^2, mentre que a través del sostre és de 300 unitats per m^2. La pèrdua pel sòl és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem per a què la pèrdua de calor total sigui mínima.

Anomenem *x* al costat de la base i *y* a l'altura del magatzem. Llavors:

- Pèrdues pels laterals: $400xy$.
- Pèrdues pel sostre: $300x^2$.
- Pèrdues totals: $400xy + 300x^2$.

Tenint en compte el valor del volum, $y = \dfrac{768}{x^2}$, i això permet expressar les pèrdues com una funció de *x*.

$$P(x) = \frac{307200}{x} + 300x^2 .$$

Derivant, igualant a zero i resolent s'obté

$$P'(x) = 0 \;\rightarrow\; -\frac{307200}{x^2} + 600x = 0 \;\rightarrow\; x^3 = 512 \;\Rightarrow\; x = 8 .$$

Finalment, es comprova que es tracta d'un mínim

$$P''(x) = \frac{2 \cdot 307200}{x^3} + 600 \;\rightarrow P''(8) > 0 .$$

Per tot això, la solució és: $x = 8m$, $y = 12m$.

1 punt per plantejar el problema.
1 punt per expressar les pèrdues com a funció d'una única variable.
1 punt per resoldre DERIVADA=0.
0.5 punts per comprovar que es tracta d'un mínim.
0.5 punts per obtenir el valor de *y*.

6.- A l'espai es consideren els tres plans d'equacions respectives:
$\pi_1 : x+2y+z=1$, $\pi_2 : px+y+pz=1$ i $\pi_3 : px+y+2z=1$ on p és un paràmetre real.
a) Esbrineu per a quins valors de p els tres plans es tallen en un únic punt. Trobeu aquest punt quan $p=1$.
b) Hi ha algun valor de p que faci que la intersecció comuna sigui una recta? Si és així, escriviu l'equació vectorial d'aquesta recta.
c) Trobeu quina és la posició relativa dels tres plans quan $p=1/2$.

De fet, l'estudi demanat es pot fer a partir de la discussió del sistema format per les equacions dels tres plans.

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ px+y+pz=1 \\ px+y+2z=1 \end{cases}$$

En primer lloc, s'estudia el rang de la matriu ampliada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ p & 1 & p & 1 \\ p & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1-2p & 0 & 1-p \\ 0 & 1-2p & 2-p & 1-p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1-2p & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 2-p & 0 \end{pmatrix}.$$

Llavors, la matriu de coeficients deixa de tenir rang 3 quan $p=1/2$ i $p=2$.

Es pot arribar a la mateixa conclusió igualant a zero el determinant de la matriu de coeficients.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 1 & p \\ p & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2p^2-5p+2=0 \to p=\frac{1}{2}, 2.$$

El cas $p=1/2$ fa que el sistema sigui incompatible i $p=2$ compatible indeterminat.

a) Els tres plans es tallen en un punt quan p és diferent de 2 i de 1/2, ja que llavors el sistema és compatible determinat. Quan $p=1$, el sistema triangulat s'escriu

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ -y=0 \\ z=0 \end{cases},$$

que proporciona com a solució el punt (1,0,0).

b) Per a què la intersecció sigui una recta cal que el sistema sigui compatible indeterminat. Això només pot succeir quan $p=2$. En aquest cas, els tres plans són $\pi_1 : x+2y+z=1$, $\pi_2 : 2x+y+2z=1$ i $\pi_3 : 2x+y+2z=1$, de manera que el segon i el tercer són el mateix i el primer, al no ser paral·lel, proporciona una recta com a intersecció. Aïllant y i z de les equacions dels dos primers plans s'obté $y=1/3$ i $z=1/3-x$. D'aquí, l'equació vectorial de la recta es pot escriure

$$(x,y,z)=(0,1/3,1/3)+x(1,0,-1).$$

c) Quan $p=1/2$ el sistema és incompatible, per tant no hi ha intersecció comuna als tres plans. Ara les equacions són $\pi_1: x+2y+z=1$, $\pi_2: x/2+y+z/2=1$ i $\pi_3: x/2+y+2z=1$ i és evident que els dos primers plans són paral·lels mentre que el tercer els talla.

PUNTUACIÓ:

Apartat a)

1 punt per trobar correctament els valors de *p* que discriminen.

0.5 punts per dir que es tallen en un punt quan *p* és diferent de 2 i de 1/2.

0.5 punts per resoldre el cas $p=1$.

Apartat b)

0.5 punts per donar la interpretació geomètrica del cas $p=2$

0.5 punts per l'equació vectorial de la recta.

Apartat c) 1 punt. Tenint en compte que aquest apartat es pot fer de manera independent, sembla correcte assignar-li una mica més de puntuació.

SÈRIE 1

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera que es compensin els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i* degudament arrodonida a un múltiple de 0.5, a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1.- En quin punt la recta tangent a la funció $f(x) = x \cdot e^x$ és paral·lela a l'eix d'abscisses? Escriviu l'equació de la recta tangent en aquest punt.

La recta tangent serà horitzontal quan la derivada valgui zero. Per tant

$$f'(x) = e^x + xe^x = 0 \to e^x(x+1) = 0 \to x = -1.$$

Llavors, quan $x = -1$ la tangent és horitzontal i donat que $f(-1) = -e^{-1}$, el punt de tangència és $(-1, -e^{-1})$ i la recta tangent demanada té per equació $y = -e^{-1}$, o bé $y = -\dfrac{1}{e}$.

PUNTUACIÓ:
1 punt per trobar correctament el valor de *x*.
1 punt per obtenir l'equació de la tangent.

2.- Considereu els punts de l'espai $P = (-1, a-1, 3)$, $Q = (0, a-2, 1-a)$ i $R = (2, -1, 6-6a)$.

a) Trobeu el valor de *a* per al qual els tres punts estan alineats.

b) Quan els tres punts estan alineats, quina és l'equació de la recta que els conté?

a) Una manera senzilla d'imposar que els tres punts estiguin alineats consisteix en demanar que els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{QR}$ siguin paral·lels, és a dir, proporcionals.

$\overrightarrow{PQ} = (0, a-2, 1-a) - (-1, a-1, 3) = (1, -1, -a-2)$,

$\overrightarrow{QR} = (2, -1, 6-6a) - (0, a-2, 1-a) = (2, 1-a, 5-5a)$.

Llavors, seran paral·lels si $\frac{2}{1} = \frac{1-a}{-1} = \frac{5-5a}{-a-2}$ i les dues igualtats són certes quan $a = 3$.

Existeix la possibilitat que ho facin per altres vies. Així per exemple, poden construir l'equació de la recta que passa per dos punts en funció de *a* i després imposar que passi pel tercer. Fins i tot, algun estudiant amb tendència a utilitzar fórmules pot calcular l'àrea del triangle i imposar que valgui zero.

b) Quan $a = 3$, es té $P = (-1, 2, 3)$, $Q = (0, 1, -2)$ i $\overrightarrow{PQ} = (1, -1, 5)$. La recta es pot escriure

$(x, y, z) = (0, 1, -2) + t(1, -1, -5)$ o també $x = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-5}$.

PUNTUACIÓ:
Apartat a) 0.5 punts per plantejar alguna idea correcta que porti a l'alineament dels punts i 0.5 per trobar *a* correctament.
Apartat b) 1 punt. Si el resultat de *a* no és el correcte, la situació més probable és que l'estudiant escrigui alguna equació que passi per dos dels punts i que no comprovi que no passa pel tercer i, per tant, que el resultat és incorrecte. En aquest cas compteu 0.5.

3.- Buscant els seus extrems relatius i els punts de tall amb els eixos, feu una representació aproximada de la corba d'equació $y = x^4 - x^2$. A continuació, calculeu l'àrea del recinte tancat per aquesta corba i l'eix de les abscisses.

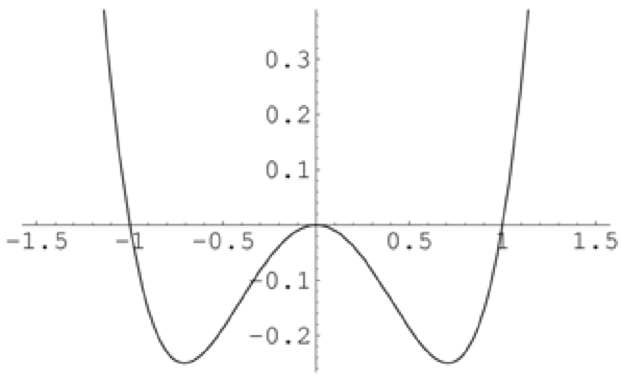
Si $f(x) = x^4 - x^2$, $f'(x) = 4x^3 - 2x$.

Extrems relatius: $4x^3 - 2x = 0 \to 2x(2x^2 - 1) = 0 \to x = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Com $f''(x) = 12x^2 - 2$, $f''(0) < 0$, $f''(1/\sqrt{2}) > 0$ i $f''(-1/\sqrt{2}) > 0$. Llavors, el punt $(0,0)$ és un màxim relatiu i $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right)$ són mínims relatius.

Punts de tall: $x^4 - x^2 = 0 \to x^2(x^2 - 1) = 0 \to x = 0, 1, -1$, $(0,0)$, $(1,0)$ i $(-1,0)$.

Gràfica:



L'àrea demanada s'obté de calcular

$$A = -\int_{-1}^{1}(x^4 - x^2)dx = -\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{15}u^2 .$$

PUNTUACIÓ:
0.5 punts pels extrems i els punts de tall.
0.5 punts per la representació gràfica.
0.5 punts pel càlcul de la primitiva.
0.5 punts per l'aplicació correcta de la regla de Barrow.

4.- Trobeu l'equació de la recta continguda en el pla $\pi : x + 2y + 6z - 2 = 0$ que talla als eixos *OY* i *OZ*.

La part més important d'aquesta qüestió és "imaginar" correctament què cal fer.
Primerament es busquen els punts de tall del pla amb els eixos esmentats.

Eix *OY*: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, que substituït dins l'equació del pla proporciona $y = 1$.

Eix *OZ*: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, que substituït dins l'equació del pla proporciona $z = \frac{1}{3}$.

Llavors, la recta demanada és la que passa pels punts $(0,1,0)$ i $(0,0,1/3)$,

$$(x, y, z) = (0,1,0) + t(0,1,-1/3),$$

o també

$$x = 0, \quad \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1/3} .$$

PUNTUACIÓ:
0.5 punts pel tall amb *OY*.
0.5 punts pel tall amb *OZ*.
1 punt per l'equació.

Si fan els càlculs malament però segueixen un esquema correcte compteu 0.5 punts.

Si escriuen l'equació contínua de la recta com $\frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1/3}$, malgrat "fer lleig", no penalitzeu i compteu un punt.

PROBLEMES

5.- Considereu la recta d'equació $r : x = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{2}$.

a) Expresseu el quadrat de la distància d'un punt qualsevol (x, y, z) de la recta al punt $P = (1, 2, 5)$ com una funció de la coordenada *x*.

b) Trobeu quin valor de *x* fa mínima aquesta funció, deduïu d'aquí quin punt *Q* de la recta és el més proper a *P* i calculeu la distància del punt a la recta.

c) Escriviu l'equació de la recta que passa per *P* i *Q* i comproveu que és perpendicular a *r*.

a) La magnitud demanada és $d^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2$. Llavors, tenint en compte que un punt qualsevol de la recta verifica

$$\frac{y-2}{2} = x \rightarrow y = 2x + 2,$$
$$\frac{z-1}{2} = x \rightarrow z = 2x + 1,$$

la funció de *x* demanada és

$$f(x) = (x-1)^2 + (2x)^2 + (2x-4)^2 = 9x^2 - 18x + 17.$$

b) Com que $f'(x) = 18x - 18$ i $f''(x) = 18$, la derivada s'anul·la quan $x = 1$ i es tracta d'un mínim.
Tenint en compte que quan la funció es mínima, la distància de *P* a la recta també ho és, el punt *Q* més proper a *P* és $(1, 4, 3)$.
Donat que $f(1) = 8$, la distància de *P* a la recta val $\sqrt{8}$.

c) L'equació de la recta que passa pels punts $P = (1, 2, 5)$ i $Q = (1, 4, 3)$ es pot escriure

$$x = 1, \ \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{-2}.$$

Com a la qüestió 4, doneu per bona la solució escrita com

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{-2}$$

Finalment, com a vectors directors de les rectes es poden considerar $(1, 2, 2)$ i $(0, 2, -2)$, que, tenen producte escalar nul, $(1, 2, 2) \cdot (0, 2, -2) = 0$, cosa que garanteix la perpendicularitat de les dues rectes.

PUNTUACIÓ:
Apartat a) 1.5 punts.
Apartat b) 0.5 punts per obtenir correctament $x = 1$; 0.5 punts pel punt *Q* i 0.5 per la distància.
Apartat c) 0.5 per l'equació de la recta i 0.5 per comprovar la perpendicularitat.

6.- Discutiu el següent sistema $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x+py+2z=10 \\ px+6y+3z=12 \end{cases}$ en funció del paràmetre p . Doneu la interpretació geomètrica del sistema en cada cas i resoleu-lo quan sigui compatible.

Amb un sol pas d'esglaonament de la matriu ampliada ja es poden treure conclusions.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & p & 2 & 10 \\ p & 6 & 3 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & p-4 & 0 & 0 \\ 0 & 6-2p & 3-p & 12-5p \end{pmatrix}.$$

- Si $p=4$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

En aquest cas els rangs de la matriu de coeficients i de l'ampliada valen 2 i el sistema és compatible indeterminat.

El sistema queda $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ -2y-z=-8 \end{cases}$ i la solució es pot escriure com $x=-3$, $z=8-2y$.

Per a aquest valor de *p*, el sistema original és $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x+4y+2z=10 \\ 4x+6y+3z=12 \end{cases}$. Si s'interpreta que cada equació correspon a un pla, les dues primeres representen el mateix. El tercer el talla sobre la recta d'equació $x=-3$, $z=8-2y$.

- Si $p=3$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ara la matriu de coeficients té rang 2 i l'ampliada 3. El sistema és incompatible.

En aquest cas el sistema s'escriu $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x+3y+2z=10 \\ 3x+6y+3z=12 \end{cases}$. Els plans primer i tercer són paral·lels i el segon els talla de manera que no hi ha intersecció comuna.

- Si $p \neq 3$ i $p \neq 4$ tots dos rangs valen 3 i el sistema és compatible determinat. Per a aquests valors del paràmetre, si es fa un pas més d'esglaonament, s'obté

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & p-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-p & 12-5p \end{pmatrix}.$$

Llavors, la solució és $z = \dfrac{12-5p}{3-p}$, $y = 0$ i $x = \dfrac{3}{3-p}$, corresponent a tres plans que es tallen en un punt.

Probablement, molts estudiants, en lloc d'esglaonar, calcularan el determinant de la matriu de coeficients que, com es veu a continuació, quan s'iguala a zero condueix als valors de p que discriminen.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 6 & 3 \\ 2 & p & 2 \end{vmatrix} = p^2 - 7p + 12 = 0 \to p = 3,4 .$$

A partir d'aquí cal continuar la discussió com abans. Les resolucions també es poden dur a terme usant el mètode de Cramer.

PUNTUACIÓ:
0.5 punts per obtenir per algun mitjà correcte els valors de p que discriminen.
1 punt per la discussió completa. Si es deixen un cas per discutir resteu 0.5. Si se'n deixen dos o tres compteu zero punts per la discussió.
0.5 punts per cada una de les dues resolucions (total 1 punt per la part de resolució).
0.5 punts per cada interpretació geomètrica (total 1.5 punts per la part d'interpretació).