SÈRIE 2

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera que es compensin els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i* degudament arrodonida a un múltiple de 0.5, a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1.- Se sap que certa funció derivable $F(x)$ ***verifica les condicions*** $F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ ***i*** $F(1)=3$***.***

a) Trobeu $F(x)$***.***

b) Calculeu l'àrea compresa entre $F(x)$ ***i l'eix OX des de*** $x=0$ ***fins a*** $x=1$***.***

PUNTUACIÓ: 1 punt cada apartat.

Solució:

a) En primer lloc es calcula la primitiva de la derivada,

$$F(x)=\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx=\int x^{-1/4}dx=\frac{x^{3/4}}{3/4}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C\,.$$

A continuació, aplicant $F(1)=3$, s'obté la constant: $\frac{4}{3}+C=3\Rightarrow C=\frac{5}{3}$. Així, la funció demanada és

$$F(x)=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{3}\,.$$

b) Tenint en compte que la funció és sempre positiva, l'àrea demanada s'obté de calcular

$$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1\left(\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{3}\right)dx=\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{x^{7/4}}{7/4}+\frac{5}{3}x\right]_0^1=\frac{17}{7}\,.$$

2.- Siguin $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ ***i*** $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$***.***

a) Trobeu la matriu M ***, quadrada d'ordre 2, tal que*** $M\cdot A=B$***.***

b) Comproveu que $M^2=I_2$ ***(matriu identitat d'ordre 2); deduïu l'expressió de*** M^n***.***

PUNTUACIÓ: 1 punt cada apartat.

Solució:

a) Podem calcular *M* utilitzant la matriu inversa de la matriu *A*,

$$M=B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/4 & 3/8\\ -1/4 & 1/8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1 & 1/2\end{pmatrix}.$$

També es pot resoldre com un sistema d'equacions, posant $M=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$. Llavors,

$$\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y=1\\ -3x+2y=3\\ z+2t=2\\ -3z+2t=-2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1/2\\ y=3/4\\ z=1\\ t=1/2\end{cases}$$

b) En efecte, $M^2=M\cdot M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$. Amb això, $M^n=\begin{cases}M, & \text{si } n \text{ és senar}\\ I_2, & \text{si } n \text{ és parell}\end{cases}$.

3.- Donat el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases}x+y+(m-1)z=1\\ x+(m-1)y+z=m-1\\ (m-1)x+y+z=m+2\end{cases}$$

discutiu-lo en funció dels valors del paràmetre m***.***

PUNTUACIÓ: 2 punts

Solució:

Primerament es fa l'escalonament de la matriu ampliada,

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & m-1 & 1\\ 1 & m-1 & 1 & m-1\\ m-1 & 1 & 1 & m+2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & m-1 & 1\\ 0 & m-2 & 2-m & m-2\\ 0 & -m+2 & 2m-m^2 & 3\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & m-1 & 1\\ 0 & m-2 & 2-m & m-2\\ 0 & 0 & 2+m-m^2 & m+1\end{array}\right)\quad;\quad 2+m-m^2=0\Leftrightarrow m=-1,\quad m=2.$$

S'observa que els valors que cal estudiar separadament són $m=-1$ i $m=2$.

S'arriba a la mateixa conclusió igualant a zero el determinant de la matriu de coeficients

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^3 + 3m^2 - 4 = -(m-2)^2(m+1).$$

Llavors, quan *m* és diferent de 2 i de -1, el sistema és compatible determinat.

Si $m = 2$, la matriu ampliada, després d'escalonar, és $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ i el sistema és incompatible ja que la matriu de coeficients té rang 1 i l'ampliada rang 2.

Finalment, si $m = -1$ la matriu és $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ i el sistema és compatible indeterminat ja que tant la matriu de coeficients com l'ampliada tenen rang 2.

4.- Trobeu l'equació de la recta perpendicular al pla $\pi : 2x - y + z + 3 = 0$ ***que passa pel punt*** $(-1, 3, a)$ ***del pla.***

PUNTUACIÓ: 2 punts.

Solució:

Si el punt $(-1, 3, a)$ és del pla, ha de complir la seva equació,

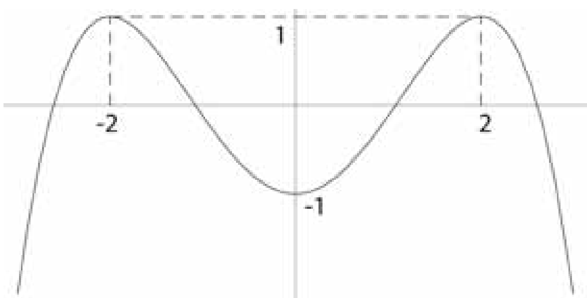
$$2 \cdot (-1) - 3 + a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

El vector director de la recta buscada ha de ser paral·lel al vector característic del pla, la qual cosa permet agafar com a vector director aquest mateix vector. Així, l'equació de la recta és

$$(x, y, z) = (-1, 3, 2) + \lambda(2, -1, 1).$$

PROBLEMES

5.- Considereu una funció tal que la seva representació gràfica a l'interval $(-3, 3)$ ***és***



a) Esbrineu les abscisses dels seus punts extrems (màxims i mínims) relatius.

b) Estudieu el creixement i decreixement de la funció a l'interval $(-3, 3)$***.***

c) Feu un esbós de la gràfica de la derivada d'aquesta funció.

d) ***Sabent que la funció és de la forma*** $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ***, trobeu de quina funció es tracta.***

PUNTUACIÓ:
Apartat a) 0.5 punts; apartat b) 0.5 punts; apartat c) 1 punt; apartat d) 2 punts.

Solució:

a) És fàcil observar que els màxims relatius es troben quan $x = -2$ i $x = 2$. El mínim relatiu té abscissa $x = 0$.

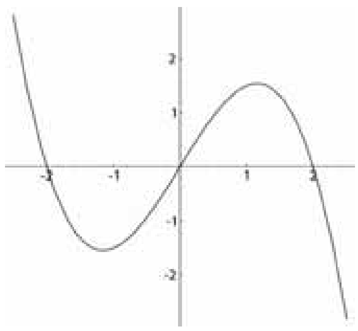
b) D'acord amb la gràfica, la funció és

- creixent a $(-3,-2) \cup (0,2)$.
- decreixent a $(-2,0) \cup (2,3)$.

Gràficament,

(-3,-2)	(-2,0)	(0,2)	(2,3)
$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

c) La gràfica de la derivada és



d) Sabem que $f(-2) = 1$, $f(2) = 1$, $f'(-2) = 0$, $f'(2) = 0$, $f'(0) = 0$ i $f(0) = -1$. És a dir, tenim el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{r} 16a + 4b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = 1 \\ -32a - 4b = 0 \\ 32a + 4b = 0 \\ c = -1 \end{array}\right\} \text{que té per solucions } a = -1/8,\ b = 1 \text{ i } c = -1.$$

O sigui, que la funció és $f(x) = -x^4/8 + x^2 - 1$.

6.- Donades les rectes $r:\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$, $s:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z+5}{3}$ ***i el punt*** $P=(1,1,-1)$***, volem trobar l'equació de la recta que passa per*** P ***tallant a*** r ***i*** s***. Per aconseguir-ho, es demana:***

a) Trobeu l'equació general o cartesiana (és a dir, l'equació de la forma $Ax+By+Cz+D=0$***) del pla*** π ***que conté la recta*** r ***i el punt*** P ***.***

b) Busqueu el punt M ***intersecció entre el pla*** π ***i la recta*** s***.***

c) Trobeu l'equació de la recta que passa pels punts P ***i*** M ***.***

d) Comproveu que la recta trobada a l'apartat anterior és la que estem buscant .

PUNTUACIÓ: 1 punt per cada apartat.

Solució:

a) L'equació del pla π es pot trobar de diferents maneres. Aquí se n'exposen dues.

La primera consisteix en trobar dos vectors generadors del pla. Com que ha de contenir la recta r, el vector director d'ella, $\vec{v}_r=(1,2,-1)$, és un dels vectors generadors. L'altre es pot calcular com $\overrightarrow{PQ}$, essent Q un punt qualsevol de la recta r ; per exemple, $Q=(2,-1,0)$. Així, $\overrightarrow{PQ}=(2,-1,0)-(1,1,-1)=(1,-2,1)$ i l'equació vectorial del pla π és $(x,y,z)=(1,1,-1)+\lambda(1,2,-1)+\mu(1,-2,1)$, que dóna lloc a l'equació general $y+2z+1=0$.

En la segona forma, agafem l'equació $Ax+By+Cz+D=0$ i fem que sigui verificada per tres dels punts del pla: $P=(1,1,-1)$, $Q_1=(2,-1,0)$ i $Q_2=(3,1,-1)$. Els dos últims estan extrets de la recta r: Q_1 es dedueix directament de l'equació i Q_2 s'obté sumant una vegada el vector director $\vec{v}_r=(1,2,-1)$ a Q_1. El sistema d'equacions que ens queda és

$$\begin{cases} A+B-C+D=0 \\ 2A-B+D=0 \\ 3A+B-C+D=0 \end{cases}$$

que té per solució $A=0$, $B=D$, $C=2D$. Fent $D=1$, per exemple, obtenim l'equació buscada: $y+2z+1=0$.

b) Les equacions paramètriques de la recta s són $x=1+\lambda$, $y=-7+2\lambda$, $z=-5+3\lambda$. Substituint-les a l'equació del pla anterior, tenim

$$(-7+2\lambda)+2(-5+3\lambda)+1=0 \Leftrightarrow 8\lambda-16=0 \Leftrightarrow \lambda=2 .$$

El punt de tall és $M=(1+2,-7+4,-5+6)=(3,-3,1)$.

Naturalment, hi ha altres maneres per a calcular aquest punt. Per exemple, l'equació contínua de la recta s es pot descompondre en dues equacions implícites i resoldre el sistema format per elles i l'equació del pla de l'apartat anterior.

c) L'equació contínua de la recta demanada és

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-1}{-3-1}=\frac{z+1}{1+1}\Leftrightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{2}\ .$$

d) Per construcció, la recta trobada passa pel punt $P=(1,1,-1)$ i talla a la recta *s* en el punt $M=(3,-3,1)$. Per tant, solament resta per comprovar que també talla a la recta *r*. Un dels mètodes per a realitzar aquesta comprovació és veure que el sistema format per les equacions contínues d'ambdues rectes és compatible determinat,

$$\left\{\begin{array}{ccccc}\dfrac{x-2}{1} & = & \dfrac{y+1}{2} & = & \dfrac{z}{-1}\\ \dfrac{x-1}{2} & = & \dfrac{y-1}{-4} & = & \dfrac{z+1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr}2x & - & y & & & = & 5\\ & & y & + & 2z & = & -1\\ 2x & + & y & & & = & 3\\ x & & & - & z & = & 2\end{array}\right.$$

Sumant la primera i la tercera equació tenim $4x=8$, és a dir, $x=2$. D'aquí, a més a més, $y=-1$. De la segona equació, $z=0$, valor que també compleix la quarta equació. Per tant, la recta de l'apartat c) talla a la recta *r* en el punt $(2,-1,0)$.

Aquest apartat es pot raonar també sense buscar el punt d'intersecció amb *r*. En efecte, la recta trobada a l'apartat c) passa per P i per M per construcció. Com que, a més a més. està continguda al pla π, que també conté la recta *r*, la intersecció entre les dues està assegurada, a menys que fossin paral·leles, que no és, evidentment, el cas.

SÈRIE 5

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera que es compensin els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i* degudament arrodonida a un múltiple de 0.5, a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1.- Trobeu els valors dels paràmetres a i b per tal que la funció següent sigui contínua i derivable en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ x^3 + bx + 5 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

PUNTUACIÓ: 2 punts.

Solució:

Per a què la funció sigui contínua en el punt $x = 2$, cal que els límits laterals existeixin, coincideixin i siguin iguals al valor de la funció en el punt.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (ax^2 + 2x + 3) = 4a + 7;$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^3 + bx + 5) = 13 + 2b.$$
$$f(2) = 13 + 2b$$

Així, ens queda que la funció és contínua en $x = 2$ si i sol si $4a + 7 = 13 + 2b$.

Per estudiar la derivabilitat, busquem les derivades laterals en el punt 2,

$$f'_-(x) = 2ax + 2 \Rightarrow f'_-(2) = 4a + 2 \ ; \quad f'_+(x) = 3x^2 + b \Rightarrow f'_+(2) = 12 + b \ .$$

La funció és derivable en el punt $x = 2$, si i sol si $4a + 2 = 12 + b$. Arribem així al sistema

$$\begin{cases} 4a - 2b = 6 \\ 4a - b = 10 \end{cases}$$

que té per solució $a = \frac{7}{2},\ b = 4$.

2.- Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$, on a i b són nombres reals.

a) Calculeu el valor de a i b per tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Per als valors obtinguts a l'apartat anterior, calculeu A^3 i A^4.

c) Sigui n un nombre natural qualsevol. Doneu l'expressió de A^n en funció de n.

PUNTUACIÓ: 1 punt per l'apartat a); 0.5 punts per l'apartat b); 0.5 punts per l'apartat c).

Solució:

a) Calculem A^2 i igualem a la matriu que ens indiquen.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 2a \\ 0 & (a-b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'aquí, cal que $(a+b)^2 = 1$, $(a-b)^2 = 1$ i $2a = 2$. La solució de la tercera equació és $a = 1$. De la primera i tercera equació deduïm que $b = 0$.

b) La matriu obtinguda a l'apartat anterior és $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Llavors,

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) A la vista dels resultats obtinguts fins ara, l'expressió de la potència n-ésima de la matriu A és $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.- Digueu per quin valor de x la recta tangent a la corba $y = \ln(x^2 + 1)$ és paral·lela a la recta $y = x$. Escriviu l'equació d'aquesta tangent.

PUNTUACIÓ: 2 punts.

Solució:

El pendent de la recta tangent ha de valer 1. Per tant, cal igualar la derivada de la funció $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ a aquest valor.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

L'equació de la recta tangent és $y = x - 1 + \ln(2)$.

4.- Donats el pla $\pi : 3x - 2y + 5z = 6$ i la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{-3}$, busqueu el punt de tall, si existeix.

PUNTUACIÓ: 2 punts.

Solució:

De l'equació contínua de la recta se'n dedueix que

$$x = 1 + 2\lambda \ , \ \ y = -1 + \lambda \ , \ \ z = -2 - 3\lambda \ .$$

Substituint aquests valors a l'equació del pla π ens queda que

$$3(1+2\lambda) - 2(-1+\lambda) + 5(-2-3\lambda) = 6 \Leftrightarrow -11\lambda = 11 \Leftrightarrow \lambda = -1 \ .$$

El punt de tall és $P = (-1, -2, 1)$.

El problema també es pot resoldre trobant les equacions implícites de la recta i resolent el sistema de tres equacions amb tres incògnites resultant d'ajuntar-hi l'equació del pla.

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2y + 2 \\ -3y - 3 = z + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3y + z = -5 \end{cases}$$

El sistema és

$$\begin{cases} 3x & - & 2y & + & 5z & = & 6 \\ x & - & 2y & & & = & 3 \\ & & 3y & + & z & = & -5 \end{cases}$$

que té per solució el punt P.

PROBLEMES

5.- Considereu el sistema d'equacions

$$\begin{cases} 2x & + & y & - & (a-1)z & = & 4 \\ x & - & 2y & + & z & = & -4 \\ 4x & - & (a+1)y & + & z & = & -2a \end{cases}$$

- ***a) Discutiu-lo en funció del paràmetre a.***
- ***b) Resoleu-lo quan sigui compatible indeterminat.***
- ***c) En el cas (b), trobeu una solució del sistema en què x, y i z tinguin valors enters.***

PUNTUACIÓ: 2 punts per l'apartat a); 0.5 punts per l'apartat b); 1 punt per l'apartat c); 0.5 punts per l'apartat d).

Solució:

a) Escalonant la matriu ampliada del sistema ens queda

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1-a & 4 \\ 4 & -a-1 & 1 & -2a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -a-1 & 12 \\ 0 & -a+7 & -3 & 16-2a \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -a-1 & 12 \\ 0 & 0 & -a^2+6a-8 & 2a-4 \end{array}\right)$$

Nota: ens podem estalviar l'últim pas mirant si la segona i la tercera files de la matriu del sistema (no de l'ampliada) són proporcionals:

$$\frac{5}{-a+7} = \frac{-a-1}{-3} \Leftrightarrow -15 = a^2 - 6a - 7 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 8 = 0$$

Sigui d'una o altra manera, cal buscar els valor del paràmetre a per als quals $-a^2 + 6a - 8 = 0$. Les solucions d'aquesta equació de segon grau són $a = 2$, $a = 4$. Llavors,

- Si $a \neq 2$ i $a \neq 4$, tenim que $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|b) = 3$. El sistema és compatible determinat.
- Si $a = 2$,

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

  El sistema és compatible indeterminat, ja que $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|b) = 2$.

- Si $a = 4$,

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

  El sistema és incompatible, ja que $\operatorname{rang} A = 2 \neq \operatorname{rang}(A|b) = 3$.

b) La resolució del sistema en el cas compatible indeterminat ens porta a què

$$y = \frac{12+3z}{5} \quad , \quad x = \frac{4+z}{5}$$, per a qualsevol valor de z.

c) Qualsevol valor de la forma $z = 1 + 5n$ dóna lloc a solucions amb components enteres.

En efecte, si $z = 1 + 5n$, llavors

$$x = \frac{4+(1+5n)}{5} = 1 + n \quad \text{i} \quad y = \frac{12+3(1+5n)}{5} = \frac{15+15n}{5} = 3 + 3n.$$

Per exemple, per $n = 0$, la solució és $x = 1$, $y = 3$, $z = 1$.

6.- De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 10 cm, trobeu la longitud dels catets d'aquell que té perímetre màxim. Feu la comprovació de què la solució trobada correspon realment al perímetre màxim.

PUNTUACIÓ: 2.5 punts pel càlcul dels catets; 1.5 punts per la comprovació.

Solució:

Siguin x i y els catets del triangle. Llavors sabem, d'acord amb el teorema de Pitàgores, que $x^2 + y^2 = 10^2$, la qual cosa ens permet aïllar, per exemple, el valor de la variable y en funció de la x: $y = \sqrt{100 - x^2}$.

El perímetre del triangle és $P = 10 + x + y = 10 + x + \sqrt{100 - x^2}$.

Per trobar el màxim d'aquest valor, calculem la derivada del perímetre respecte de x.

$P'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$. Igualem aquesta expressió a zero i esbrinem el valor de la variable x,

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{100 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 5\sqrt{2}\ .$$

El valor negatiu no té cap sentit en aquest problema (encara més: es pot observar que el valor negatiu NO ÉS solució de l'equació $P'(x) = 0$). Així, ens quedarem amb $x = 5\sqrt{2}$. Llavors, $y = \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}$.

Per fer la comprovació demanada, podem buscar el signe de la derivada segona de la funció $P(x)$ en el punt $x = 5\sqrt{2}$,

$$P''(x) = \frac{-100}{(100 - x^2)^{3/2}} \Rightarrow P''(5\sqrt{2}) = \frac{-100}{(100 - 50)^{3/2}} < 0\,.$$

Que la segona derivada sigui negativa ens diu que el punt $(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$ correspon a un màxim.

La comprovació també es pot fer analitzant el signe de la primera deriva de la funció perímetre, tenint en compte que el domini de la funció $P'(x)$ és $(-10, 10)$.

$(-10, 5\sqrt{2})$	$(5\sqrt{2}, 10)$
$P'(x) > 0$	$P'(x) < 0$
La funció creix	La funció decreix