



## Proves d'accés a la Universitat. Curs 2008-2009

---

### Matemàtiques

#### Sèrie 4

---

Responeu a TRES de les quatre qüestions i resoleu UN dels dos problemes següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts, i el problema, 4 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

---

#### QÜESTIONS

1. Donats el punt  $P = (1, 2, 3)$  i la recta  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-1}$ :

**a)** Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma  $Ax + By + Cz + D = 0$ ) del pla  $\pi$  que passa per  $P$  i és perpendicular a la recta  $r$ .

**b)** Trobeu el punt de tall entre la recta  $r$  i el pla  $\pi$ .

[1 punt per cada apartat]

2. Siguin  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**a)** Comproveu que la inversa de  $A$  és  $A^2$ .

**b)** Comproveu també que  $A^{518} = B$ .

[1 punt per cada apartat]

3. Considereu la funció  $f(x) = \frac{x(a-x)}{a^3}$ , amb  $a > 0$ .

**a)** Trobeu els punts de tall de la funció  $f(x)$  amb l'eix  $OX$ .

**b)** Comproveu que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció  $f(x)$  i l'eix d'abscisses no depèn del valor del paràmetre  $a$ .

[0,5 punts per l'apartat  $a$ ; 1,5 punts per l'apartat  $b$ ]

4. En la resolució pel mètode de Gauss d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites ens hem trobat amb la matriu següent:

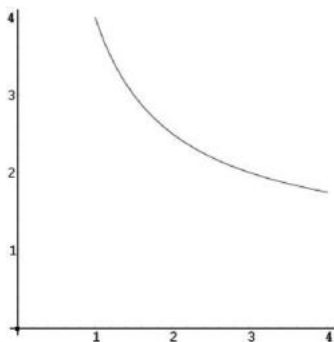
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array} \right)$$

- a) Expliqueu, raonadament, quin és el caràcter del sistema inicial.  
b) Si és compatible, trobeu-ne la solució.

[1 punt per cada apartat]

## PROBLEMES

5. La gràfica de la funció  $f(x) = \frac{3+x}{x}$ , des de  $x = 1$  fins a  $x = 4$ , és la següent:



- a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa  $x = 1$  i  $x = 3$ .  
b) Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.  
c) Trobeu els vèrtexs d'aquest recinte.  
d) Calculeu la superfície del recinte damunt dit.

[1 punt per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c; 1,5 punts per l'apartat d]

6. Siguin  $r$  i  $s$  dues rectes de l'espai les equacions respectives de les quals, que depenen d'un paràmetre real  $b$ , són les següents:

$$r: \begin{cases} bx + y + 3z = 1 \\ x + 2y + 5z = 1 \end{cases}, \quad s: \frac{x}{1} = \frac{y-b}{b+1} = \frac{z+1}{-1}$$

- a) Trobeu el punt de tall de la recta  $r$  amb el pla d'equació  $x = 0$  i el punt de tall de la recta  $s$  amb aquest mateix pla.  
b) Calculeu un vector director per a cada una de les dues rectes.  
c) Estudieu la posició relativa de les dues rectes en funció del paràmetre  $b$ .

[1 punt per l'apartat a; 1 punt per l'apartat b; 2 punts per l'apartat c]





## Proves d'accés a la Universitat. Curs 2008-2009

---

### Matemàtiques

#### Sèrie 3

---

Responeu a TRES de les quatre qüestions i resolcu UN dels dos problemes següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts, i el problema, 4 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

---

#### QÜESTIONS

1. Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix}$ . Trobeu els valors dels paràmetres  $a$  i  $b$  perquè

la matriu tingui rang 1.

[2 punts]

2. Considereu les corbes  $y = 4x - x^2$  i  $y = x^2 - 6$ .
- Trobeu-ne els punts d'intersecció.
  - Representeu les dues corbes en una mateixa gràfica, on es vegi clarament el recinte que limiten entre elles.
  - Trobeu l'àrea d'aquest recinte limitat per les dues corbes.

[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

3. Donat el sistema  $\begin{cases} x + py = p \\ px + y = p \end{cases}$ :

- Discutiu-ne el caràcter en funció del paràmetre  $p$ .
- Resoleu-lo quan  $p = 2$ .

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

4. Donats el pla  $\pi: x + 2y - z = 0$  i el punt  $P = (3, 2, 1)$ :

- Calculeu l'equació contínua de la recta  $r$  que passa per  $P$  i és perpendicular a  $\pi$ .
- Calculeu el punt simètric del punt  $P$  respecte del pla  $\pi$ .

[1 punt per cada apartat]

## PROBLEMES

5. Sigui la funció  $f(x) = a + \frac{4}{x} + \frac{b}{x^2}$ .

**a)** Calculeu els valors de  $a$  i  $b$ , sabent que la recta  $2x + 3y = 14$  és tangent a la gràfica de la funció  $f(x)$  en el punt d'abscissa  $x = 3$ .

Per a la resta d'apartats, considereu que  $a = -3$  i que  $b = 4$ .

**b)** Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció  $f(x)$ . Trobeu i classifiqueu els extrems relatius que té la funció.

**c)** Calculeu els punts de tall de la funció  $f(x)$  amb l'eix  $OX$ .

**d)** Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció  $f(x)$ , l'eix  $OX$  i les rectes  $x = 1$  i  $x = 3$ .

[1 punt per l'apartat *a*; 1 punt per l'apartat *b*; 0,5 punts per l'apartat *c*; 1,5 punts per l'apartat *d*]

6. Siguin  $P = (3 - 2a, b, -4)$ ,  $Q = (a - 1, 2 + b, 0)$  i  $R = (3, -2, -2)$  tres punts de l'espai  $\mathbb{R}^3$ .

**a)** Calculeu el valor dels paràmetres  $a$  i  $b$  per als quals aquests tres punts estiguin alineats.

**b)** Trobeu l'equació contínua de la recta que els conté quan estan alineats.

**c)** Quan  $b = 0$ , trobeu els valors del paràmetre  $a$  perquè la distància entre els punts  $P$  i  $Q$  sigui la mateixa que la distància entre els punts  $P$  i  $R$ .

**d)** Si  $b = 0$ , calculeu el valor del paràmetre  $a$  perquè els punts  $P$ ,  $Q$  i  $R$  determinin un triangle equilàter.

[1 punt per cada apartat]

