

SÈRIE 4

QÜESTIONS

1.- Donats el punt $P = (1, 2, 3)$ i la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-1}$:

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π que passa per P i és perpendicular a la recta r .

b) Trobeu el punt de tall entre la recta r i el pla π .

[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Podem agafar com a vector característic del pla buscat el vector director de la recta; així, $\pi : 2x + 3y - z + D = 0$. Imposem ara que el punt P compleixi aquesta equació, $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 3 + D = 0$. D'aquí $D = -5$. L'equació del pla és $\pi : 2x + 3y - z - 5 = 0$.

b) El punt de tall és el que compleix les dues equacions que defineixen la recta i l'equació del pla,

$$\left. \begin{array}{l} -x + 1 = 2z - 10 \\ -y - 2 = 3z - 15 \\ 2x + 3y - z - 5 = 0 \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} x + 2z = 11 \\ y + 3z = 13 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{array} \right\}$$

Encara que aquest sistema es pot resoldre utilitzant el mètode de Cramer, n'hi ha altres (Gauss, substitució,...) molt més fàcils. La solució d'aquest sistema és $x = 3$, $y = 1$, $z = 4$. El punt de tall és, doncs, $(3, 1, 4)$.

2.- Siguin $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que la inversa de A és A^2 .

b) Comproveu també que $A^{518} = B$.

[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Per comprovar que $A^{-1} = A^2$, cal veure que $A \cdot A^2 = I$, essent I la matriu identitat d'ordre 3. Calculem primer el valor de A^2 ,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Llavors,

$$A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tal com volíem.

Naturalment, la qüestió es pot resoldre calculant A^{-1} directament de la matriu A i comprovant després que $A^{-1} = A^2$, encara que no és aquest el procediment demanat; o sigui, en aquesta qüestió no es demana que l'estudiant sigui capaç de calcular la inversa d'una matriu 3×3 .

b) Com que $A \cdot A^2 = A^3 = I$, tenim

$$A^{518} = A^{3 \cdot 172 + 2} = (A^3)^{172} \cdot A^2 = A^2 = B.$$

3.- Considereu la funció $f(x) = \frac{x(a-x)}{a^3}$, amb $a > 0$.

a) Trobeu els punts de tall de la funció amb l'eix OX .

b) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses no depèn del valor del paràmetre a .

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

Solució

a) $f(x) = 0 \iff x(a-x) = 0 \iff x = 0$ o $x = a$. Els punts de tall són, doncs, $(0, 0)$ i $(a, 0)$.

b) L'àrea de recinte és

$$A = \int_0^a \frac{x(a-x)}{a^3} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{1}{6},$$

que, efectivament, no depèn del paràmetre a .

4.- En la resolució pel mètode de Gauss d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites ens hem trobat amb la matriu següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array} \right).$$

a) Expliqueu, raonadament, quin és el caràcter del sistema inicial.

b) Si és compatible, trobeu-ne la solució.

[1 punt per cada apartat]

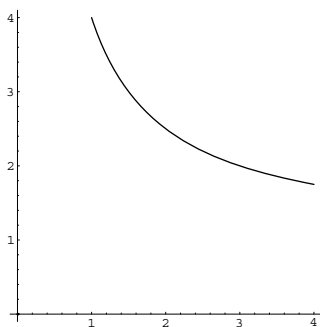
Solució

a) Com que el rang de la matriu de coeficients del sistema i el de la matriu ampliada és dos, podem assegurar que el sistema inicial és compatible indeterminat.

b) El sistema inicial és equivalent al sistema $\left. \begin{array}{l} 3x - 5y + 2z = -5 \\ y - 2z = 2 \end{array} \right\}$, que té per solució $x = (5 + 8z)/3$, $y = 2 + 2z$, on z és un paràmetre.

PROBLEMES

5.- La gràfica de la funció $f(x) = \frac{3+x}{x}$, des de $x = 1$ fins a $x = 4$, és la següent:



- Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 3$.
- Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.
- Trobeu els vèrtexs d'aquest recinte.
- Calculeu la superfície del recinte damunt dit.

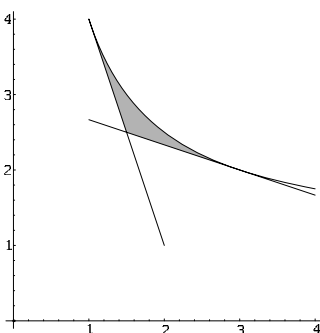
[1 punt per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c; 1,5 punts per l'apartat d]

Solució

a) L'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció $f(x)$ en un punt x_0 és $y = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$. La derivada de la funció donada és $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$. Per tant,

- En el punt d'abscissa $x = 1$, l'equació de la recta tangent és $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$, és a dir, $y = 7 - 3x$.
- En el punt d'abscissa $x = 3$, l'equació és $y = f(3) + f'(3)(x - 3)$, o sigui, $y = 3 - \frac{x}{3}$.

b) El dibuix del recinte limitat per la corba i les dues tangents trobades és



c) Els vèrtexs del recinte són els punts de tall (o de contacte) entre la corba i les dues rectes que el limiten. Com que les rectes són tangents a la corba, els "punts de tall" (de fet, solament de contacte) entre cada una de elles i la corba són $(1, 4)$ i $(3, 2)$, respectivament. El vèrtex que falta és el punt d'intersecció entre les dues rectes,

$$\left. \begin{array}{l} y = 7 - 3x \\ y = 3 - x/3 \end{array} \right\} \iff x = 3/2, y = 5/2 .$$

En resum, els vèrtexs del recinte són, ordenats segons les abscisses, $(1, 4)$, $(3/2, 5/2)$ i $(3, 2)$.

d) La superfície demanada és

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{3/2} \left(\frac{3+x}{x} - (7-3x) \right) dx + \int_{3/2}^3 \left(\frac{3+x}{x} - \left(3 - \frac{x}{3} \right) \right) dx \\ &= \int_1^{3/2} \left(\frac{3}{x} - 6 + 3x \right) dx + \int_{3/2}^3 \left(\frac{3}{x} - 2 + \frac{x}{3} \right) dx \\ &= \left[3 \ln|x| - 6x + \frac{3x^2}{2} \right]_1^{3/2} + \left[3 \ln|x| - 2x + \frac{x^2}{6} \right]_{3/2}^3 \\ &= \ln(27) - 3 \simeq 0,2958. \end{aligned}$$

6.- Siguin r i s dues rectes de l'espai les equacions respectives de les quals, que depenen d'un paràmetre real b , són les següents:

$$r : \begin{cases} bx + y + 3z = 1 \\ x + 2y + 5z = 1 \end{cases}, \quad s : \frac{x}{1} = \frac{y-b}{b+1} = \frac{z+1}{-1}.$$

a) Trobeu el punt de tall de la recta r amb el pla d'equació $x = 0$ i el punt de tall de la recta s amb aquest mateix pla.

b) Calculeu un vector director per a cada una de les rectes.

c) Estudieu la posició relativa de les dues rectes en funció del paràmetre b .

[1 punt per l'apartat a; 1 punt per l'apartat b; 2 punts per l'apartat c]

Solució

a) El punt de tall de la recta r amb el pla $x = 0$, té la primera component nul·la i, per tant, ha de complir que

$$\begin{cases} y + 3z = 1 \\ 2y + 5z = 1 \end{cases}.$$

La solució d'aquest sistema és $y = -2$ i $z = 1$. Així el punt que estem buscant és $P = (0, -2, 1)$.

Quant a trobar el punt de tall de la recta s amb el pla $x = 0$, solament cal substituir aquest valor a l'equació contínua de la recta s per veure que, llavors, $y = b$ i $z = -1$. Així el punt buscat és $Q = (0, b, -1)$.

b) El vector director de la recta r ha de ser perpendicular als vectors característics dels plans que la determinen, $v_1 = (b, 1, 3)$, $v_2 = (1, 2, 5)$. Llavors, si $v_r = (\alpha, \beta, \gamma)$, cal que

$$(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (b, 1, 3) = 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (1, 2, 5) = 0.$$

Aquests productes escalars donen lloc al sistema d'equacions

$$\begin{cases} \alpha b + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$$

De la segona equació, $\alpha = -2\beta - 5\gamma$. Substituint a la primera equació i fent operacions s'arriba a que $\beta(1 - 2b) = \gamma(3 - 5b)$, la qual cosa permet agafar, per exemple, $\beta = 3 - 5b$ i $\gamma = 1 - 2b$. Llavors,

$$\alpha = -2\beta - 5\gamma = -2(3 - 5b) - 5(1 - 2b) = -1.$$

Així el vector director serà $v_r = (-1, 3 - 5b, 2b - 1)$.

Recordem que v_r també es pot calcular efectuant un producte vectorial,

$$v_r = (b, 1, 3) \times (1, 2, 5) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -i + (3 - 5b)j + (2b - 1)k = (-1, 3 - 5b, 2b - 1).$$

El vector director de la recta s es treu directament de la seva equació, $v_s = (1, b + 1, -1)$.

c) Construïm la matriu

$$A = \begin{pmatrix} \overline{PQ} \\ v_r \\ v_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b+2 & -2 \\ -1 & 3-5b & 2b-1 \\ 1 & b+1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & b+1 & -1 \\ 0 & b+2 & -2 \\ 0 & 4-4b & 2b-2 \end{pmatrix}$$

Estudiem el rang d'aquesta matriu, comprovant per quin valor del paràmetre b les dues últimes files són proporcionals, és a dir,

$$(b+2)(2b-2) = -2(4-4b) \iff b^2 - 3b + 2 = 0 \iff b = 1 \text{ o } b = 2.$$

Per tant,

- Si $b \neq 1$ i $b \neq 2$, tenim que $\text{rang } A = 3$; les dues rectes es creuen.
- Si $b = 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; d'aquí, $\text{rang } A = 2$ i $\text{rang} \begin{pmatrix} v_r \\ v_s \end{pmatrix} = 1$. Les dues rectes són paral·leles.
- Si $b = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; o sigui, $\text{rang } A = 2$ i $\text{rang} \begin{pmatrix} v_r \\ v_s \end{pmatrix} = 2$. Les dues rectes es tallen.

SÈRIE 3

QÜESTIONS

1.- Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix}$. Trobeu els valors dels paràmetres a i b perquè tingui rang 1.

[2 punts]

Solució

Escalonem la matriu, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & b-2a \\ 0 & a^2-2b \end{pmatrix}$.

Perquè el rang sigui 1 cal que $b-2a=0$ i $a^2-2b=0$. De la primera equació se'n dedueix que $b=2a$; posant-ho a la segona queda $a^2-4a=0$; és a dir, $a=0$ o $a=4$. Llavors les solucions són:

$$a=0, b=0 \quad \text{o bé} \quad a=4, b=8.$$

També es pot plantejar l'exercici, per exemple, forçant que les dues columnes siguin proporcionals, però les equacions a resoldre seran les mateixes.

2.- Considereu les corbes $y=4x-x^2$ i $y=x^2-6$.

a) Trobeu-ne els punts d'intersecció.

b) Representeu les dues corbes en una mateixa gràfica, on es vegi clarament el recinte que limiten entre elles.

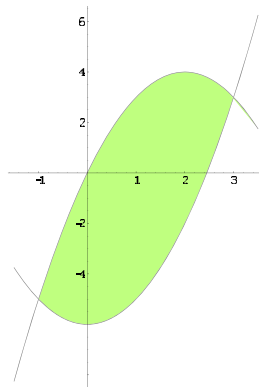
c) Trobeu l'àrea d'aquest recinte limitat per les dues corbes.

[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

Solució

a) Les abscisses dels punts de tall d'ambdues corbes, han de complir que $4x-x^2=x^2-6$. Les solucions d'aquesta equació són $x=-1$ i $x=3$. Així els punts de tall són $(-1, -5)$ i $(3, 3)$.

b) La gràfica és la següent:



c) Comprovem quina és la corba que limita el recinte per dalt

$$y = 4x - x^2 \implies y(0) = 0 ; \quad y = x^2 - 6 \implies y(0) = -6.$$

La corba d'equació $y = 4x - x^2$ és la que va per damunt. Llavors,

$$A = \int_{-1}^3 [(4x - x^2) - (x^2 - 6)] dx = \int_{-1}^3 (4x - 2x^2 + 6) dx = \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3} + 6x \right]_{-1}^3 = \frac{64}{3}.$$

3.- Donat el sistema $\begin{cases} x + py = p \\ px + y = p \end{cases}$:

a) **Discutiu-ne el caràcter en funció del paràmetre p .**

b) **Resoleu-lo quan $p = 2$.**

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

a) Escalonem la matriu ampliada del sistema,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & p & p \\ p & 1 & p \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & p & p \\ 0 & 1 - p^2 & p - p^2 \end{array} \right)$$

Analitzem el valor de l'element $1 - p^2$. Tenim que $1 - p^2 = 0$ si i sol si $p = \pm 1$. Per tant,

- Si $p \neq -1$ i $p \neq 1$, el sistema és compatible determinat, ja que el rang de la matriu del sistema i el de l'ampliada és 2, coincidint, a més a més, amb el número d'incògnites.
- Si $p = -1$, la matriu escalonada és $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$. El rang de la matriu del sistema és 1 i el de l'ampliada és 2. El sistema és incompatible.
- Si $p = 1$, la matriu escalonada és $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$. El sistema és compatible indeterminat perquè el rang de la matriu del sistema i el de l'ampliada coincideixen (valen 1), però és inferior al número d'incògnites.

b) Per $p = 2$, el sistema és $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ o, escalonat, $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ -3y = -2 \end{cases}$. La solució és $x = 2/3$, $y = 2/3$.

4.- Donats el pla $\pi : x + 2y - z = 0$ i el punt $P = (3, 2, 1)$:

a) **Calculeu l'equació contínua de la recta r que passa per P i és perpendicular a π .**

b) **Calculeu el punt simètric del punt P respecte del pla π .**

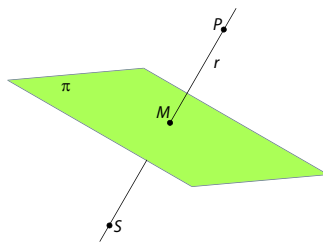
[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Els coeficients de l'equació del pla ens proporcionen el seu vector característic, que ens pot servir com a vector director de la recta buscada. Per tant, l'equació d'aquesta recta és

$$r : \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 1}{-1}$$

b) El punt de tall entre r i π és el punt mig entre el punt P i el seu simètric respecte del pla π .



Busquem aquest punt, al qual anomenarem M .

$$\begin{cases} (x, y, z) \in r \iff x = 3 + \lambda, y = 2 + 2\lambda, z = 1 - \lambda \\ (x, y, z) \in \pi \iff x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Llavors, $(3 + \lambda) + 2(2 + 2\lambda) - (1 - \lambda) = 0 \iff 6\lambda + 6 = 0 \iff \lambda = -1$. El punt de tall és $M = (2, 0, 2)$. Si anomenem $S = (x_s, y_s, z_s)$ al punt simètric, tenim

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MS} \iff (2, 0, 2) - (3, 2, 1) = (x_s, y_s, z_s) - (2, 0, 2) \iff x_s = 1, y_s = -2, z_s = 3$$

El punt simètric és $S = (1, -2, 3)$.

PROBLEMES

5.- Sigui $f(x) = a + \frac{4}{x} + \frac{b}{x^2}$.

a) Calculeu els valors de a i b , sabent que la recta $2x + 3y = 14$ és tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$.

Per la resta d'apartats, considereu que $a = -3$ i que $b = 4$.

b) Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $f(x)$. Trobeu i classifiqueu els extrems relatius que té la funció.

c) Calculeu els punts de tall de la funció $f(x)$ amb l'eix OX .

d) Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix OX i les rectes $x = 1$ i $x = 3$.

[1 punt per l'apartat a; 1 punt per l'apartat b; 0,5 punts per l'apartat c; 1,5 punts per l'apartat d]

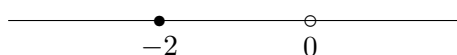
Solució

a) Perquè la recta $y = \frac{14 - 2x}{3}$ sigui tangent a $f(x)$ en el punt $x = 3$ cal que $f(3) = y(3)$ i que $f'(3) = y'(3)$. Tenint en compte que $f'(x) = -\frac{4}{x^2} - \frac{2b}{x^3}$, ens queda el sistema d'equacions

$$a + \frac{4}{3} + \frac{b}{9} = \frac{8}{3} \quad \text{i} \quad -\frac{4}{9} - \frac{2b}{27} = -\frac{2}{3},$$

que té per solució $a = 1$ i $b = 3$.

b) La funció, quan $a = -3$ i $b = 4$, és $f(x) = -3 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}$ i la seva derivada és $f'(x) = -\frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^3}$. Els possibles extrems relatius han de complir $f'(x) = 0$; de fet, aquesta equació solament té la solució $x = -2$. Cal tenir en compte, a més a més, que el punt $x = 0$ no és del domini de la funció. Així, per estudiar els intervals on la funció creix o decreix, haurem d'assenyalar sobre la recta real els punts $x = -2$ i $x = 0$,



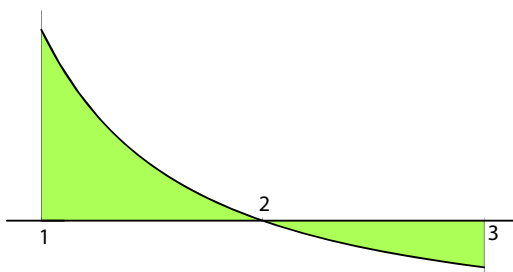
Com que $f'(-3) < 0$, $f'(-1) > 0$ i $f'(1) < 0$, podem assegurar que

- la funció $f(x)$ és creixent a $(-2, 0)$;
- la funció $f(x)$ és decreixent a $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$;
- la funció té un mínim relatiu en $x = -2$; és el punt $(-2, -4)$.

Cal notar que la funció no té extrem relatiu en $x = 0$ perquè aquest punt no és del domini.

c) Les abscisses dels punts de tall d'aquesta funció amb l'eix OX són les solucions de l'equació $f(x) = 0$ (és a dir, $-3 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$). Aquestes solucions són $x = -2/3$ i $x = 2$.

d) Com que el punt de tall amb l'eix OX $x = 2$ està dins de l'interval d'integració, tal com es pot veure a la figura següent,



l'àrea demanada s'ha de calcular en dos trossos,

$$A = \int_1^2 \left(-3 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \right) dx + \int_2^3 \left(3 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx = \left[-3x + 4 \ln |x| - \frac{4}{x} \right]_1^2 + \left[3x - 4 \ln |x| + \frac{4}{x} \right]_2^3$$

$$= \frac{4}{3} + 4 \ln \frac{4}{3} \simeq 2,4841 .$$

6.- Siguin $P = (3 - 2a, b, -4)$, $Q = (a - 1, 2 + b, 0)$ i $R = (3, -2, -2)$ tres punts de l'espai \mathbb{R}^3 .

a) Calculeu el valor dels paràmetres a i b per als quals aquests tres punts estiguin alineats.

b) Calculeu l'equació contínua de la recta que els conté quan estan alineats.

c) Quan $b = 0$, trobeu les valors del paràmetre a perquè la distància entre els punts P i Q sigui la mateixa que la distància entre els punts P i R .

d) Si $b = 0$, calculeu el valor del paràmetre a perquè els punts P , Q i R determinin un triangle equilàter.

[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Els punts P , Q i R estan alineats si i sol si $\overrightarrow{PQ} = k \cdot \overrightarrow{PR}$, és a dir, si i sol si

$$(3a - 4, 2, 4) = k(2a, -2 - b, 2)$$

D'aquí, cal que $3a - 4 = 2ka$, $2 = k(-2 - b)$ i $4 = 2k$. De l'última equació se'n treu que $k = 2$ i, llavors, $a = -4$ i $b = -3$.

b) Per $a = -4$ i $b = -3$, els punts són $P = (11, -3, -4)$, $Q = (-5, -1, 0)$ i $R = (3, -2, -2)$. La recta que passa per P i Q (i, per tant, també per R) té per equació contínua

$$\frac{x - 11}{-5 - 11} = \frac{y + 3}{-1 + 3} = \frac{z + 4}{0 + 4}, \text{ és a dir, } \frac{x - 11}{-16} = \frac{y + 3}{2} = \frac{z + 4}{4} .$$

c) Quan $b = 0$ els punts són $P = (3 - 2a, 0, -4)$, $Q = (a - 1, 2, 0)$ i $R = (3, -2, -2)$. Llavors,

$$d(P, Q) = \sqrt{[(a - 1) - (3 - 2a)]^2 + (2 - 0)^2 + (0 + 4)^2} = \sqrt{(3a - 4)^2 + 20},$$

$$d(P, R) = \sqrt{[3 - (3 - 2a)]^2 + (-2 - 0)^2 + (-2 + 4)^2} = \sqrt{4a^2 + 8}.$$

La igualtat entre aquestes dues distàncies es produeix quan $(3a - 4)^2 + 20 = 4a^2 + 8$, és a dir, quan $a = 14/5$ o $a = 2$.

d) Perquè el triangle sigui equilàter ha de passar que $d(P, Q) = d(P, R) = d(Q, R)$. La primera igualtat és la que s'ha estudiat en l'apartat anterior. Imposem ara que $d(P, Q) = d(Q, R)$:

$$d(P, Q) = d(Q, R) \iff 9a^2 - 24a + 36 = a^2 - 8a + 36 \iff 8a^2 - 16a = 0 \iff a = 0 \text{ o } a = 2.$$

Evidentment també podem imposar que $d(P, R) = d(Q, R)$. En aquest cas queda $a = 2$ o $a = -14/3$.

Segui com sigui, el valor del paràmetre a per al qual el triangle determinat per P , Q i R és equilàter és $a = 2$.

Aquest apartat es pot resoldre també substituint a cada un dels punts els valors del paràmetre a trobats a l'apartat anterior, comprovant quin dels dos fa que les tres distàncies siguin iguals.