SÈRIE 2

1.- Donada la matriu $M = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$,

(a) Calculeu els valors del paràmetre k ***per als quals la matriu*** M ***no és invertible.***

(b) Per a $k = 0$, ***calculeu*** M^{-1}.

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Sabem que una matriu és invertible si i sol si el seu determinant és no nul. Busquem, doncs, el determinant de la matriu M,

$$\det M = \begin{vmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & 0 & -k-1 \end{vmatrix} = (k+1)(k-2)(-k-1) = -(k+1)^2(k-2)\,.$$

Aquest determinant val zero quan $k = -1$ o $k = 2$; aquests són els valors per als que la matriu no és invertible.

(b) Per $k = 0$ la matriu és $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ i la seva inversa es pot calcular utilitzant el mètode de Gauss-Jordan,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

També es pot calcular utilitzant la matriu complementària (matriu adjunta transposta).

La matriu inversa és

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.- Donada la recta $\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3x = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{array}\right\}$, ***calculeu l'equació general (és a dir, de la forma*** $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla perpendicular a la recta que passa pel punt*** $P = (1, 0, -1)$.

[2 punts]

Solució

Perquè el pla buscat i la recta donada siguin perpendiculars, el vector normal del pla i el director de la recta han de ser paral·lels; el més senzill és agafar-los iguals. Busquem, doncs, el vector director de la recta,

$$v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + j + k = (-1, 1, 1)\,.$$

L'equació del pla π amb vector normal $v_\pi = (A, B, C)$, passant pel punt $P = (x_0, y_0, z_0)$ és

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\,.$$

En el nostre cas, ens queda

$$(-1)(x-1)+1(y-0)+1(z+1)=0, \quad \text{és a dir,} \ -x+y+z+2=0\,.$$

3.- Donada la funció $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$:

(a) Determineu la relació que han de complir els paràmetres a, b i c perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=-1$.

(b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè hi hagi un punt d'inflexió de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=0$.

(c) Determineu la relació entre els paràmetres a, b i c sabent que la gràfica de $f(x)$ talla l'eix OX en el punt d'abscissa $x=-2$.

(d) Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c perquè es compleixin les tres propietats anteriors alhora.

[0,5 punts per cada apartat]

Solució

(a) Perquè hi pugui haver un extrem relatiu de la funció en $x=-1$, cal que $f'(-1)=0$. Com que $f'(x)=3x^2+2ax+b$, la relació buscada és $3-2a+b=0$.

(b) En un punt d'inflexió la segona derivada ha de ser zero. Tenim que $f''(x)=6x+2a$; per tant, $f''(0)=2a=0$. Llavors, $a=0$.

(c) És clar que la condició és $f(-2)=-8+4a-2b+c=0$.

(d) Cal resoldre el sistema $3-2a+b=0$, $a=0$, $-8+4a-2b+c=0$. La solució és $a=0$, $b=-3$ i $c=2$.

4.- Sigui la matriu $A=\begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0\\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(a) Calculeu A^2 i A^3.

(b) Deduïu el valor de A^{101}.

NOTA***: treballeu amb radicals; no utilitzeu la representació decimal dels elements de la matriu.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Tenim que

$$A^2=\begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0\\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0\\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2 & 0\\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0\\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2 & 0\\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3\,.$$

(b) Com que $101=33\cdot 3+2$, ens queda

$$A^{101}=A^{33\cdot 3+2}=(A^3)^{33}\cdot A^2=(I_3)^{33}\cdot A^2=A^2=\begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2 & 0\\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

5.- Considereu la recta $r : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = z - a$ **i el pla** $\pi : 2x + y - 5z = 5$ **.**

(a) Estudieu la posició relativa de la recta r **i el pla** π **en funció del paràmetre** a**.**

(b) Quan $a = 3$**, trobeu la distància de la recta** r **al pla** π**.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El vector director de la recta és $v_r = (3, -1, 1)$; el punt $P = (1, -2, a)$ pertany a la recta r. Per altra banda, el vector normal del pla π és $v_\pi = (2, 1, -5)$. Comprovem si v_r i v_π són o no ortogonals,

$$v_r \cdot v_\pi = (3, -1, 1) \cdot (2, 1, -5) = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-5) = 0 \ .$$

Efectivament, ho són. Per tant, la recta és paral·lela al pla o la recta està continguda en el pla. Per acabar-ho de decidir, mirem si el punt P pertany o no al pla.

$$P \in \pi \iff 2 \cdot 1 + (-2) - 5a = 5 \iff a = -1 \ .$$

En definitiva,

- Si $a = -1$, la recta està continguda al pla.
- Si $a \neq -1$, la recta i el pla són paral·lels.

(b) Per trobar la distància entre una recta i un pla paral·lels, n'hi ha prou en calcular la distància d'un punt qualsevol de la recta al pla. Així,

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + (-2) - 5 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \frac{20}{\sqrt{30}} \ .$$

6.- Sigui $f(a) = \displaystyle\int_0^{1/a} (a^2 + x^2)dx$ **per** $a > 0$ **.**

(a) Comproveu que $f(a) = \dfrac{1}{3a^3} + a$ **.**

(b) Calculeu el valor del paràmetre a **perquè la funció** $f(a)$ **tingui un mínim relatiu.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) $f(a) = \displaystyle\int_0^{1/a} (a^2 + x^2)dx = \left[a^2 x + \frac{x^3}{3} \right]_0^{1/a} = a^2 \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{3a^3} = a + \frac{1}{3a^3}$.

(b) Perquè la funció $f(a)$ tingui un mínim, és necessari que $f'(a) = 0$. Així,

$$f'(a) = 1 - \frac{1}{a^4} = 0 \Longrightarrow a^4 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1 \, .$$

La condició $a > 0$ fa que ens quedem solament amb $a = 1$.

La derivada segona de la funció és $f''(a) = 4/a^5$. Llavors, $f''(1) > 0$, la qual cosa indica que per a $a = 1$ hi ha un mínim.