SÈRIE 3

1.- Digueu per a quin valor del paràmetre m els plans

$$\pi_1 : x - y + mz = 1 \ , \qquad \pi_2 : x - y + z = m \ , \qquad \pi_3 : my + 2z = 3 \ ,$$

tenen com a intersecció una recta.

[2 punts]

Solució

Els tres plans es tallen en una única recta si i solament si el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x - y + mz = 1 \\ x - y + z = m \\ my + 2z = 3 \end{array}\right\}$$

és compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Calculem el determinant de la matriu de coeficients d'aquest sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = m^2 - m \ .$$

Aquest determinant val zero si $m = 0$ o $m = 1$.

L'estudi també es pot fer escalonant la matriu,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 1 & m \\ 0 & m & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 1 \\ 0 & 0 & 1-m & m-1 \\ 0 & m & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 1 \\ 0 & m & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1-m & m-1 \end{array}\right)$$

i veient que hi pot haver problemes per a $m = 0$ (en aquest cas la matriu encara no està escalonada) i per a $m = 1$.

- Per a $m = 0$, l'escalonament de la matriu ampliada del sistema ens condueix a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) .$$

  El sistema és incompatible i, per tant, els tres plans no tenen cap punt en comú. La seva intersecció no és una recta.

- Per a $m = 1$, l'escalonament de la matriu ampliada del sistema és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

  Ara el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

En definitiva, els tres plans es tallen en una sola recta si i sol si $m = 1$.

2.- Donades la recta $y = 3x + b$ i la paràbola $y = x^2$,

(a) ***Calculeu l'abscissa del punt on la recta tangent a la paràbola és paral·lela a la recta donada.***

(b) ***Trobeu el valor del paràmetre b perquè la recta sigui tangent a la paràbola.***

[1 punt per apartat]

Solució

Posarem $y_1(x) = 3x + b$ i $y_2(x) = x^2$.

(a) Una condició necessària i suficient perquè dues rectes siguin paral·leles és que els seus pendents siguin iguals. Com que el pendent de la recta és $m_r = y_1'(x) = 3$ (també es pot trobar directament com a coeficient de la variable x, ja que es dóna l'equació explícita de la recta) i la derivada de la paràbola és $y_2'(x) = 2x$, la recta donada i la recta tangent són paral·leles en el punt on $3 = 2x$, és a dir, en el punt on l'abscissa valgui $x = 3/2$.

(b) L'únic punt on la recta i la paràbola podem ser tangents és el punt d'abscissa $x = 3/2$. Ho seran si i sol si $y_1(3/2) = y_2(3/2)$, que succeeix quan $b = -9/4$.

3.- *Donants el pla* $\pi\colon x - y + 2z - 5 = 0$ *i la recta* $r\colon \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$

(a) ***Calculeu el punt d'intersecció entre el pla i la recta.***

(b) ***Trobeu l'equació contínua de la recta s continguda al pla π, que és perpendicular a la recta r i talla a la recta r .***

[1 punt per apartat]

Solució

(a) La forma que sembla més senzilla per a la resolució d'aquest apartat és construir un sistema de tres equacions amb tres incògnites i resoldre'l. El sistema és

$$\left.\begin{array}{c} x - y + 2z - 5 = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{array}\right\} ,$$

que té per solució el punt $P = (4, -3, -1)$.

Hi ha altres formes de resolució, tal com trobar les equacions paramètriques de la recta i substituir-les al pla.

(b) El vector director de la recta s ha de ser perpendicular al director de r i al característic de π . Comencem per calcular el vector director de la recta r,

$$v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 1, -3) .$$

Una forma de trobar el director de s és efectuar el producte vectorial dels dos vectors, $v_\pi = (1, -1, 2)$ i v_r .

$$v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (1, 7, 3) .$$

Com que la recta s (que ha d'estar continguda a π) ha de tallar a la recta r , el punt de tall és el mateix que el de tall entre r i π . Per tant, l'equació contínua de la recta s és

$$\frac{x - 4}{1} = \frac{y + 3}{7} = \frac{z + 1}{3} .$$

4.- Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ***i*** $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(a) ***Comproveu que es compleix la igualtat*** $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ***.***

(b) ***És certa aquesta igualtat per a qualsevol parell de matrius quadrades*** A ***i*** B ***del mateix ordre? Responeu raonadament utilitzant les propietats generals de les operacions entre matrius, sense utilitzar matrius*** A ***i*** B ***concretes.***

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Fem els càlculs que ens demanen,

$$(A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -8 & -8 \end{pmatrix};$$
$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Efectivament, són iguals.

Aquest apartat es pot fer també comprovant que les matrius donades compleixen que $AB = BA$,

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Llavors,

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - BA + BA - B^2 = A^2 - B^2 .$$

(b) La igualtat proposada no és certa sempre, ja que

$$(A + B)(A - B) = AA - AB + BA - BB = A^2 - AB + BA - B^2 ,$$

i la matriu $-AB + BA$ no és, en general, la matriu nul·la, perquè el producte de matrius no és commutatiu.

5.- Un triangle equilàter de vèrtexs A***,*** B ***i*** C ***té els costats de*** $8\,cm$***. Situem un punt*** P ***sobre una de les altures del triangle a una distància*** x ***de la base corresponent.***

(a) Calculeu l'altura del triangle de vèrtexs A***,*** B ***i*** C***.***

(b) Indiqueu la distància del punt P ***a cada un dels vèrtexs (en funció de*** x***).***

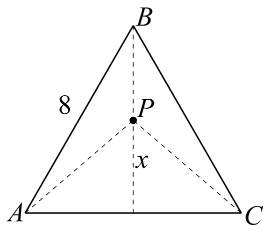
(c) Determineu el valor de x ***perquè la suma dels quadrats de les distàncies del punt*** P ***a cadascun dels tres vèrtexs sigui mínima.***

[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

Solució

(a) Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle resultant d'agafar la meitat del triangle equilàter, tindrem que

$$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}\,.$$



També podem treballar amb trigonometria,

$$\sin 60^o = \frac{h}{8} \iff h = 8\sin 60^o = 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,.$$

(b) Les distàncies demanades són

$$d(P,A) = d(P,C) = \sqrt{4^2+x^2} = \sqrt{16+x^2}\,; \quad d(P,B) = h - x = 4\sqrt{3} - x\,.$$

(c) La funció que es vol fer mínima és $f(x) = (d(P,A))^2 + (d(P,B))^2 + (d(P,C))^2$, és a dir,

$$f(x) = 2(16+x^2) + (4\sqrt{3}-x)^2 = 3x^2 - 8\sqrt{3}x + 80\,.$$

Per tal de trobar el mínim d'aquesta funció, cal igualar la seva deriva a zero. Com que $f'(x) = 6x - 8\sqrt{3}$, l'equació $f'(x) = 0$ proporciona $x = \dfrac{8\sqrt{3}}{6} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Per ser $f''(x) = 6 > 0$, podem assegurar que es tracta realment d'un mínim, tal com es volia.

6.- Donats els punts $P = (1,0,0)$, $Q = (0,2,0)$, $R = (0,0,3)$ i $S = (1,2,3)$,

(a) ***Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que conté els punts P, Q i R.***

(b) ***Comproveu si els quatre punts són coplanaris (és a dir, si els quatre estan continguts en un mateix pla).***

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Hi ha diferents formes de trobar l'equació del pla que conté els punts P, Q i R. Aquí se'n presenten tres.

- Buscant els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$. Aquests vectors són generadors del pla. El seu producte vectorial és un vector característic o normal del pla buscat,

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6,3,2)\,.$$

  Amb això, el pla és de la forma $6x + 3y + 2z + D = 0$. Imposant que passi per P (o per Q o per R) s'obté que $D = -6$. En definitiva, $\pi\colon 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

- Plantejant l'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ i imposant que la compleixin els tres punts, s'arriba a un sistema d'equacions lineal,

$$\left.\begin{aligned} A + D &= 0 \\ 2B + D &= 0 \\ 3C + D &= 0 \end{aligned}\right\}\,,$$

que ens porta a $A = -D$, $B = -D/2$ i $C = -D/3$. Si fem $D = -6$, ens queda $A = 6$, $B = 3$ i $C = 2$. L'equació buscada és $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

- Agafant els vectors $\overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 0)$ i $\overrightarrow{PR} = (-1, 0, 3)$ com a generadors del pla (es poden agafar qualssevol altres vectors formats pels punts P, Q, R, sempre que no es considerin un vector i el seu oposat). Llavors, l'equació del pla és

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff 6(x-1) + 2z + 3y = 0\,.$$

  La matriu de la qual es calcula el determinant pot ser, evidentment, la transposada de la que s'ha utilitzat aquí; igualment, el punt que es resta a (x, y, z) pot ser qualsevol dels tres donats.

(b) Els quatre punts són coplanaris si el punt S pertany al pla que acabem de trobar. Per tant, cal que el punt $(1, 2, 3)$ compleixi l'equació del pla. Però, com que

$$6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 6 \neq 0\,,$$

podem assegurar que els quatre punts no són coplanaris.

Aquest apartat també es pot fer, per exemple, calculant el volum del tetraedre amb vèrtexs als quatre punts. Si dóna zero, són coplanaris; si no dóna zero, no ho són

$$V = \frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS})| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}\right| = 2 \neq 0\,.$$

No són coplanaris

SÈRIE 1

1.- Donats els plans $\pi_1\colon 3x+y-2z+15=0$ ***i*** $\pi_2\colon x+y+2z-103=0$***,***

(a) Comproveu que són perpendiculars.

(b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$***) del pla que és perpendicular a*** π_1 ***i*** π_2***, passant pel punt*** $P=(1,3,2)$ ***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Dos plans són perpendiculars si ho són els seus vectors normals. Aquests vectors normals són, respectivament, $v_1=(3,1,-2)$ i $v_2=(1,1,2)$. Com que

$$v_1\cdot v_2=(3,1,-2)\cdot(1,1,2)=3+1-4=0\,,$$

els plans són perpendiculars.

(b) Podem trobar el vector normal al pla buscat fent el producte vectorial dels vectors normals dels plans π_1 i π_2.

$$v_3=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=4i-8j+2k=(4,-8,2)\,.$$

L'equació del pla π amb vector normal $v_\pi=(A,B,C)$, passant pel punt $P=(x_0,y_0,z_0)$ és

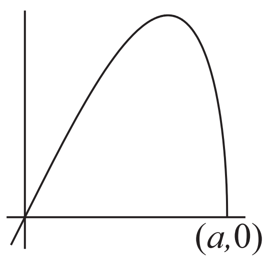
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\,.$$

En el nostre cas, ens queda

$$4(x-1)-8(y-3)+2(z-2)=0\,,\quad \text{és a dir,}\quad 4x-8y+2z+16=0$$

o, simplificat, $2x-4y+z+8=0$.

2.- La gràfica de la funció $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$ ***és la següent:***



(a) ***Trobeu el punt de tall,*** $(a,0)$***, de la funció amb la part positiva de l'eix*** OX ***.***

(b) ***Calculeu l'àrea limitada per la gràfica de*** $f(x)$ ***i l'eix*** OX ***en el primer quadrant.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

(a) El paràmetre a és l'abscissa del punt de tall de la corba amb l'eix OX. És a dir, és una de les solucions de l'equació $x\sqrt{9-x^2}=0$, que són $x=0$, $x=\pm3$. Com que ha de ser $a>0$, és evident que $a=3$.

(b) Per aquest segon apartat, descriurem dues solucions.

Solució 1

Com que la funció és positiva a l'interval [0, 3], l'àrea buscada és $A = \int_0^3 f(x)\,dx$. Busquem una primitiva per a la funció $f(x)$, amb el canvi $t = 9 - x^2$, la qual cosa fa que $dt = -2x\,dx$.

$$\int f(x)\,dx = \int x\sqrt{9-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{9-x^2}(-2x)dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt$$
$$= -\frac{t^{3/2}}{3} = -\frac{(9-x^2)^{3/2}}{3}.$$

Llavors,

$$A = \left[-\frac{(9-x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^3 = -0 + \frac{9^{3/2}}{3} = \frac{27}{3} = 9.$$

Evidentment, també es pot realitzar el càlcul sense desfer el canvi al final, sempre que es posin els límits d'integració que corresponen (per $x = 0$, queda $t = 9$; per $x = 9$, és $t = 0$):

$$A = \int_0^3 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_9^0 \sqrt{t}\,dt = \left[-\frac{t^{3/2}}{3}\right]_9^0 = -0 + \frac{9^{3/2}}{3} = \frac{27}{3} = 9.$$

Solució 2

Podem utilitzar la fórmula d'integració immediata $\int u^a\,du = \frac{u^{a+1}}{a+1}$. Llavors,

$$A = \int_0^3 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^3 (9-x^2)^{1/2}(-2x)dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{(9-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^3 = 9.$$

NOTA: No es pot donar per bo coses per l'estil de $\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx = 1/2\int_0^3 \sqrt{t}\,dt$.

3.- Sigui A una matriu quadrada d'ordre n de manera que $A^2 = O$, essent O la matriu nul·la (la formada completament per zeros).

(a) **Comproveu que $(A + I_n)^2 = 2A + I_n$.**

(b) **Comproveu que les matrius $B = I_n - A$ i $C = A + I_n$ són l'una inversa de l'altra.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Tenim que

$$(A + I_n)^2 = (A + I_n)(A + I_n) = A^2 + A + A + I_n = O + 2A + I_n = 2A + I_n.$$

S'ha utilitzat la propietat distributiva del producte de matrius.

(b) Per comprovar que B i C són l'una inversa de l'altra, efectuarem els dos productes possibles entre elles. Ambdós productes han de donar la identitat.

$$BC = (I_n - A)(A + I_n) = I_nA + I_nI_n - AA - AI_n = A + I_n - A^2 - A = I_n - O = I_n,$$
$$CB = (A + I_n)(I_n - A) = AI_n - AA + I_nI_n - I_nA = A - A^2 + I_n - A = -O + I_n = I_n,$$

tal com volíem.

NOTES:

• De què $A^2 = O$, no se'n pot deduir que la matriu A és la matriu nul·la. Considerar $A = O$ és un error molt greu.

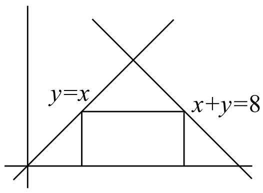
• Si s'utilitza la fórmula $(A + I_n)^2 = A^2 + 2AI_n + I_n^2$ (que és incorrecta el general), cal justificar que les matrius A i I_n "commuten" entre elles.

• En l'apartat (b) n'hi ha prou en comprovar una de les dues igualtats, ja que es pot demostrar que llavors l'altra també és certa.

4.- Un rectangle està inscrit en el triangle que té els costats en les rectes d'equacions

$$y = 3x\,, \quad x + y = 6\,, \quad y = 0\,,$$

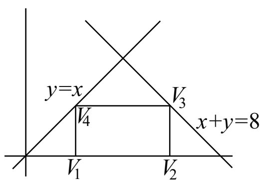
i té un costat sobre la recta $y = 0$ ***. Trobeu-ne els vèrtexs perquè la superfície sigui màxima.***



[2 punts]

Solució 1

Siguin $V_1 = (a, 0)$ i $V_2 = (b, 0)$ els vèrtexs del rectangle que es troben a l'eix OX (la recta $y = 0$), amb $a < b$. Llavors, el vèrtex que es troba a la recta $y = x$, és de la forma $V_4 = (a, a)$; l'altre vèrtex, el que es troba a la recta $x + y = 8$, és de la forma $V_3 = (b, 8 - b)$. Com que els vèrtexs V_3 i V_4 han d'estar a la mateixa altura, cal que $a = 8 - b$.



La longitud de la base del rectangle és $b - a$ i la seva altura és $a = 8 - b$. En conseqüència la seva superfície és

$$S = (b - a) \cdot a = (b - 8 + b) \cdot (8 - b) = -2b^2 + 24b - 64\,.$$

Per trobar el màxim, derivem la funció superfície i igualem la derivada a zero.

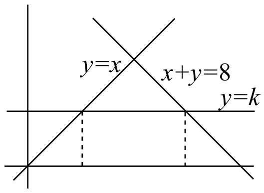
$$S'(b) = 24 - 4b\,; \quad 24 - 4b = 0 \Longrightarrow b = 6 \Longrightarrow a = 2\,.$$

Podem comprovar que el valor $b = 6$ correspon a un màxim utilitzant la segona derivada ($S''(b) = -24 < 0$), o bé argumentant que la funció superfície té per gràfica una paràbola amb coeficient de x^2 negatiu. També es pot fer comprovant el signe de la funció derivada abans (surt positiu) i després (és negatiu) del punt $b = 6$.

Els quatre vèrtex són $V_1 = (2,0)$, $V_2 = (6,0)$, $V_3 = (6,2)$, $V_4 = (2,2)$.

Solució 2

Sigui $y = k$ la recta on està el costat del rectangle paral·lel al que es troba a l'eix OX.



Els vèrtexs sobre la recta $y = k$ són (k,k) i $(8-k,k)$. Les seves projeccions ortogonals sobre l'eix OX, que són els altres dos vèrtexs, donen $(k,0)$ i $(8-k,0)$. La base del rectangle és $(8-k)-k = 8-2k$ i la seva altura és, evidentment, k. Llavors, la funció que ens dóna l'àrea del rectangle és

$$f(k) = (8-2k)k = 8k - 2k^2\,.$$

La seva derivada és $f'(k) = 8 - 4k$. Quan la igualem a zero, s'obté $k = 2$. Els quatre vèrtexs són els trobats a la solució 1. La comprovació de què es tracta realment d'un màxim es realitza de la mateixa forma que en la solució anterior.

5.- *Contesteu les preguntes següents:*

(a) ***Expliqueu raonadament si una matriu d'ordre 3 i una matriu d'ordre 2 poden tenir el mateix determinant.***

(b) ***Considereu les matrius següents:***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & 1-p & 2 \\ 1 & 2 & p \end{pmatrix} \quad \textbf{\textit{i}} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculeu, si és possible, el valor del paràmetre p ***perquè*** $\det A = \det B$ **.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El determinant de qualsevol matriu quadrada és un número (un escalar) i no depèn en absolut de l'ordre de la matriu. Així el determinant d'una matriu d'ordre 3 i el d'una d'ordre dos poden ser iguals.

Per exemple, $\det(I_3) = 1$ i $\det(I_2) = 1$.

(b) Tenim que $\det A = p - 2$ i $\det B = 4 - p^2$. Aquests determinants són iguals si $p - 2 = 4 - p^2$, equació que té com a solucions $p = -3$ i $p = 2$.

6.- *Siguin* $\pi\colon x - 3y + 2z = 1$ ***i*** $r : \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y + mz = 1 \end{cases}$ **. *Estudieu-ne la posició relativa segons el valor del paràmetre*** m **.**

[1 punt per cada apartat]

Solució 1

Comencem buscant un vector normal o característic, v_π , del pla π i un vector director, v_r , de la recta r .

$$v_\pi = (1,-3,2)\,; \quad v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = (m,-3m,-5)\,.$$

Comprovem si aquests dos vectors són perpendiculars (condició perquè el pla i la recta siguin paral·lels o perquè la recta estigui continguda al pla) per algun valor del paràmetre.

$$(1,-3,2)\cdot(m,-3m,-5) = 10m-10 = 0 \Longrightarrow m = 1\,.$$

- Per $m \neq 1$, el pla i la recta es tallen.
- Quan $m = 1$, escollim qualsevol punt de la recta i mirem si compleix l'equació del pla. Per exemple, per $x = 0$ obtenim que $y = 1$ i $-y + z = 1$; és a dir, $y = 1$ i $z = 2$. Aquest punt és el $P = (0,1,2)$. Llavors, com que $x - 3y + 2z = 0 - 3 + 4 = 1$, el punt és del pla i, per tant, $r \subset \pi$.

Solució 2

Estudiem el caràcter del sistema format per l'equació del pla i les dues equacions de la recta. Si el sistema és compatible determinat el pla i la recta es tallen; si és compatible indeterminat la recta està continguda al pla; si és incompatible, el pla i la recta són paral·lels.

El sistema és

$$\left\{ \begin{aligned} x - 3y + 2z &= 1 \\ 3x + y &= 1 \\ 2x - y + mz &= 1 \end{aligned} \right.$$

Busquem el determinant de la matriu del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = 10m - 10\,,$$

i trobem el valor del paràmetre perquè valgui zero.

$$10m - 10 = 0 \Longrightarrow m = 1\,.$$

Ja podem assegurar que per a $m \neq 1$ el sistema és compatible determinat i, per tant, el pla i la recta es tallen.

Per a $m = 1$, l'esglaonament de la matriu ampliada és

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 1 \\ 3 & 1 & 0 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 10 & -6 & | & -2 \\ 0 & 5 & -3 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 5 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Les operacions elementals realitzades han estat

(1) $F_2 - 3F_1$; $F_3 - 2F_1$.

(2) $F_2/2$; $2F_3 - F_2$.

En aquest cas, el sistema és compatible indeterminat. La recta està continguda al pla.