SÈRIE 4

1.- Determineu el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ***en funció del valor del paràmetre*** k.

[2 punts]

Solució

En ser la matriu quadrada, començarem calculant el seu determinant.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} k+2 & k+2 & k+2 \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} k+2 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & 0 \\ k & 1-k & 1-k \end{vmatrix}$$
$$= (k+2)(k-1)(1-k) = -(k+2)(k-1)^2.$$

En (1) s'ha fer $F_1 + F_2 + F_3$, ja que així s'aconsegueix que tots els elements de la primera fila siguin iguals. En (2) s'ha fet $C_2 - C_1$ i $C_3 - C_1$.

Si $\det A \neq 0$, el rang de la matriu A és 3; en cas contrari, és menor que 3. Resolem, doncs, l'equació $\det A = 0$.

$$-(k+2)(k-1)^2 = 0 \iff k = -2 \text{ o } k = 1\,.$$

Es pot arribar a la mateixa conclusió escalonant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 \end{pmatrix}.$$

i resolent $2 - k - k^2 = 0$.

Per tant,

- Si $k \neq -2$ i $k \neq 1$, tenim que rang $A = 3$.
- Si $k = -2$, la matriu A és
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
En aquest cas, rang $A = 2$.
- Finalment, per $k = 1$, la matriu A és
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
que té, evidentment, rang 1.

2.- Sigui $f(x) = \dfrac{ax^2}{x+b}$***, en què*** $a \neq 0$ ***.***

(a) Determineu si té alguna asímptota vertical, en funció del paràmetre b.

(b) Indiqueu el valor dels paràmetres a ***i*** b ***perquè la funció*** $f(x)$ ***tingui la recta*** $y = 2x - 4$ ***com a asímptota obliqua a*** $+\infty$ ***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) La funció, per ser racional, pot tenir una asímptota vertical en el valor de la variable x que anul·li el denominador, $x = -b$. Llavors,

- Si $b \neq 0$, $\lim\limits_{x\to -b} \dfrac{ax^2}{x+b} = \dfrac{ab^2}{0} = \infty$ (el signe d'aquest "límit" depèn de si es realitza per la dreta o per l'esquerra, però no ens interessa). En aquest cas, la recta $x = -b$ és una asímptota vertical.
- Si $b = 0$, $\lim\limits_{x\to -b} \dfrac{ax^2}{x+b} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} ax = 0$. Llavors, la funció no té cap asímptota vertical.

(b) **Solució 1**

Una asímptota obliqua al $+\infty$ és de la forma $y = mx + n$ amb

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)\,.$$

En el nostre cas,

- $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{ax^2}{x+b}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax^2}{x^2+bx} = a\,.$
- $n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{ax^2}{x+b} - ax\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-abx}{x+b} = -ab\,.$

Si l'asímptota obliqua a $+\infty$ ha de ser $y = 2x - 3$, cal que $a = 2$ i $-ab = -4$. Per tant, la resposta és

$$a = 2 \quad \text{i} \quad b = 2\,.$$

Solució 2

Com que la funció donada és racional, podem efectuar el seu quocient, obtenint que

$$\frac{ax^2}{x+b} = ax - ab + \frac{ab^2}{x+b}\,,$$

d'on l'asímptota obliqua és $y = ax - ab$. Llavors, $a = 2$ i $-ab = -4$ i es segueix igual que abans.

3.- Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{aligned} x + y - 3z &= 2 \\ 2x + ay - 5z &= 2a + 3 \\ 2x - 3y + (a-2)z &= 9 \end{aligned}\right\}\,.$$

(a) ***Calculeu el valor o els valors del paràmetre*** a ***per al qual o per als quals el sistema és compatible indeterminat.***

(b) ***Quantes solucions té el sistema quan*** $a = -3$***?***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Calculem el determinant de la matriu del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 2 & -3 & a-2 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 3\,.$$

Aquest determinant val zero quan $a = 1$ o $a = -3$.

Evidentment, aquest apartat es pot resoldre també aplicant el mètode de Gauss a la matriu ampliada del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & a & -5 & 2a+3 \\ 2 & -3 & a-2 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & a-2 & 1 & 2a-1 \\ 0 & -5 & a+4 & 5 \end{array}\right).$$

A partir d'aquí l'escalonament es torna bastant complicat; llavors, podem analitzar si les dues últimes files de la matriu del sistema (no ampliada) són proporcionals (per tal que rang $A \neq 3$),

$$\frac{a-2}{-5} = \frac{1}{a+4} \iff (a-2)(a+4) = -5 \iff a^2 + 2a - 3 = 0 \iff a = 1 \ \text{ o } \ a = -3\,,$$

tal com surt per l'altre mètode.

• Per $a = 1$, l'escalonament de la matriu ampliada del sistema ens dóna

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \\ 2 & -3 & -1 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

El sistema és compatible indeterminat.

• Quan $a = -3$, queda la matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 9 \end{array}\right),$$

que ens assegura que el sistema és incompatible, a la vista de les dues darreres files. Així, el sistema és compatible indeterminat si i sol si $a = 1$.

(b) D'acord amb l'apartat anterior, per $a = -3$ el sistema és incompatible i, per tant, no té cap solució.

4.- Una fàbrica produeix diàriament x tones d'un producte A i $(40-5x)/(10-x)$ tones d'un producte B. La quantitat màxima de producte A que es pot produir és 8 tones. El preu de venda del producte A és 100€ per tona i el del producte B és 250€ per tona.

(a) ***Construïu la funció de la variable x que ens proporciona els ingressos diaris, suposant que es ven tota la producció.***

(b) ***Calculeu quantes tones de cada producte s'han de produir diàriament per a obtenir el màxim d'ingressos, i comproveu que és realment un màxim relatiu.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) D'acord amb l'enunciat, la funció que ens dóna els guanys diaris és

$$f(x) = 100x + 250\,\frac{40-5x}{10-x}\,.$$

(b) Per tal de localitzar el màxim benefici cal derivar la funció anterior i igualar la derivada a zero.

$$f(x) = 100x + 250\,\frac{40-5x}{10-x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{100x^2 - 2000x + 7500}{(10-x)^2}\,.$$

Llavors,

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 100x^2 - 2000x + 7500 = 0 \Longrightarrow x^2 - 20x + 75 = 0 \Longrightarrow x = 5\,,\ x = 15\,.$$

- Si $b \neq 0$, $\lim\limits_{x \to -b} \dfrac{ax^2}{x+b} = \dfrac{ab^2}{0} = \infty$ (el signe d'aquest "límit" depèn de si es realitza per la dreta o per l'esquerra, però no ens interessa). En aquest cas, la recta $x = -b$ és una asímptota vertical.
- Si $b = 0$, $\lim\limits_{x \to -b} \dfrac{ax^2}{x+b} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} ax = 0$. Llavors, la funció no té cap asímptota vertical.

(b) **Solució 1**

Una asímptota obliqua al $+\infty$ és de la forma $y = mx + n$ amb

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)\,.$$

En el nostre cas,

- $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{ax^2}{x+b}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax^2}{x^2 + bx} = a\,.$
- $n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{ax^2}{x+b} - ax \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-abx}{x+b} = -ab\,.$

Si l'asímptota obliqua a $+\infty$ ha de ser $y = 2x - 3$, cal que $a = 2$ i $-ab = -4$. Per tant, la resposta és

$$a = 2 \quad \text{i} \quad b = 2\,.$$

Solució 2

Com que la funció donada és racional, podem efectuar el seu quocient, obtenint que

$$\frac{ax^2}{x+b} = ax - ab + \frac{ab^2}{x+b}\,,$$

d'on l'asímptota obliqua és $y = ax - ab$. Llavors, $a = 2$ i $-ab = -4$ i es segueix igual que abans.

3.- Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{aligned} x + y - 3z &= 2 \\ 2x + ay - 5z &= 2a + 3 \\ 2x - 3y + (a-2)z &= 9 \end{aligned}\right\}\,.$$

(a) ***Calculeu el valor o els valors del paràmetre a per al qual o per als quals el sistema és compatible indeterminat.***

(b) ***Quantes solucions té el sistema quan $a = -3$?***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Calculem el determinant de la matriu del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 2 & -3 & a-2 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 3\,.$$

Aquest determinant val zero quan $a = 1$ o $a = -3$.

La solució d'aquest sistema és $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$. Atenció: és molt important que es vegi clar que aquesta és la solució de **tot** el sistema. És a dir, agafant tres de les equacions n'hi ha prou per trobar la solució, però cal comprovar que també es verifica l'altra equació.

Solució 2b. Una vegada construït el sistema, es pot comprovar si és o no compatible (determinat) calculant el rang de la matriu de coeficients i el de l'ampliada. Això exigeix treballar amb una matriu d'ordre 4, que no entra en els requisits de les proves, però que es pot utilitzar.

Solució 3. Construïm la matriu $A = (v_r, v_s, \overrightarrow{PQ})$, essent v_r el vector director de la recta r, v_s el de s, P un punt de la recta r i Q un punt de la recta s. Per exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les rectes es tallen si i sol si rang $A < 3$ (ja que no són ni paral·leles ni coincidents per tenir els seus vectors directors no proporcionals). Calculem, doncs, el determinant de la matriu A,

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Les rectes es tallen.

(b) Com que les rectes es tallen, la recta perpendicular que les talla passa pel seu punt de tall, que és $P_1 = (-1+2\lambda,\ 1+\lambda,\ 1-\lambda) = (1, 2, 0)$. Si l'apartat ($a$) s'ha fet de la segona o tercera forma, ara farà falta calcular aquest punt d'intersecció.

El vector director de la recta buscada és

$$v = v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1, -7, -5)\,.$$

L'equació contínua de la recta buscada és

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-0}{-5}\,.$$

6.- Donades la recta $y = ax + 1$ i la paràbola $y = 3x - x^2$,

(a) ***Calculeu els valors del paràmetre a perquè siguin tangents.***

(b) ***Calculeu els punts de tangència.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Posem $y_1 = ax + 1$ i $y_2 = 3x - x^2$.

<u>Solució 1</u>

Perquè siguin tangents en un punt d'abscissa x, cal que $y_1(x) = y_2(x)$ i $y_1'(x) = y_2'(x)$. És a dir,

$$ax + 1 = 3x - x^2\,; \qquad a = 3 - 2x\,.$$

Substituint el valor de a, donat a la segona equació, dins la primera equació, ens queda que $x = \pm 1$. Per $x = 1$ el valor de a és $a = 1$ i per $x = -1$ ens queda $a = 5$.

Solucio2

Es pot imposar que la recta i la paràbola es "tallin" en un sol punt doble. Perquè això sigui així, l'equació $ax+1=3x-x^2$ ha de tenir una sola solució; és a dir, el seu discriminant ha de ser nul. L'equació és $x^2+(a-3)x+1=0$ i el discriminant $\Delta=(a-3)^2-4\cdot 1\cdot 1$. Llavors,

$$(a-3)^2-4=0 \iff a^2-6a+5=0 \iff a=1 \quad \text{o} \quad a=5\,.$$

(b) D'acord amb els valors de la variable x trobats a l'apartat anterior (solució 1) o els que es podem trobar donant a a els valors 1 i 5 (solució 2), tenim

- Per a $a=1$ (corresponent a $x=1$), el punt de tangència és $P_1=(1,2)$.
- Quan $a=5$ (que correspon a $x=-1$), el punt de tangència és $P_2=(-1,-4)$.