



## Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

### Matemàtiques

#### Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Sabem que el vector  $(2, 1, -1)$  és una solució del sistema

$$\left. \begin{aligned} ax + by + cz &= a + c \\ bx - y + bz &= a - b - c \\ cx - by + 2z &= b \end{aligned} \right\}$$

Calculeu el valor dels paràmetres  $a$ ,  $b$  i  $c$ .

[2 punts]

2. La corba  $y = x^2$  i la recta  $y = k$ , amb  $k > 0$ , determinen una regió plana.  
**a)** Calculeu el valor de l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre  $k$ .  
**b)** Trobeu el valor de  $k$  perquè l'àrea limitada sigui  $\sqrt{6} u^2$ .

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

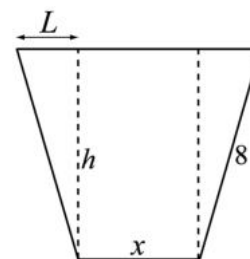
3. Sigui  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ .

- a)** Què significa que la matriu  $B$  sigui la matriu inversa de  $A$ ?  
**b)** Trobeu el valor del paràmetre  $p$  perquè la matriu inversa de  $A$  i la matriu transposada de  $A$  coincideixin.

NOTA: No aproximeu les arrels mitjançant valors amb decimals; treballeu amb els radicals.

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

4. Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.



- a) Trobeu el valor del segment  $L$  de la gràfica en funció de la variable  $x$  (amplària inferior del canal).
- b) Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}$$

- c) Calculeu el valor de  $x$  perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).

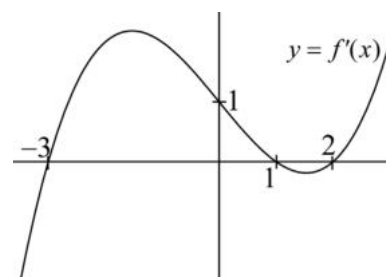
[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

5. Donats els punts  $P=(1, 0, -1)$  i  $Q=(-1, 2, 3)$ , trobeu un punt  $R$  de la recta  $r: \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-3}{-1}$  que compleixi que el triangle de vèrtexs  $P, Q$  i  $R$  és isòsceles, en què

$\overline{PR}$  i  $\overline{QR}$  són els costats iguals del triangle.

[2 punts]

6. La funció  $f(x)$  és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent  $f'(x)$  creixent als intervals  $(-\infty, -3]$  i  $[2, +\infty)$ .



- a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció  $f(x)$  en el punt d'abscissa  $x = 0$ .
- b) Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció  $f(x)$  i classifiqueu aquests extrems.

[1 punt per cada apartat]



## Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

---

### Matemàtiques

#### Sèrie 3

---

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

---

1. Sigui  $\pi: 3x - 2y + z = 10$ .
- a) Trobeu l'equació contínua de la recta  $r$  perpendicular a  $\pi$  que passa pel punt  $P = (-1, 3, 2)$ .
- b) Trobeu també l'equació cartesiana (és a dir, de la forma  $Ax + By + Cz + D = 0$ ) del pla  $\pi_1$  paral·lel a  $\pi$  que passa pel mateix punt  $P$ .
- [1 punt per cada apartat]

2. Considereu la matriu  $A = \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix}$ . Sigui  $I$  la matriu identitat d'ordre 2.
- a) Trobeu el valor del paràmetre  $a$  perquè es compleixi que  $A^2 - 2A = I$ .
- b) Calculeu la matriu inversa de la matriu  $A$  quan  $a = -2$ .
- [1 punt per cada apartat]

3. Donada la funció  $f(x) = \sqrt{x-1}$  i la recta horitzontal  $y = k$ , amb  $k > 0$ ,
- a) Feu un esbós del recinte limitat per les gràfiques de la funció i la recta, i els eixos de coordenades.
- b) Trobeu el valor de  $k$  sabent que l'àrea d'aquest recinte és igual a  $14/3$ .
- [0,5 per l'apartat a; 1,5 per l'apartat b]

4. Un triangle d'àrea  $3/2$  té dos dels vèrtexs als punts  $P = (0, 0, 0)$  i  $Q = (2, 0, 1)$ . El tercer vèrtex,  $R$ , és un punt de la recta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

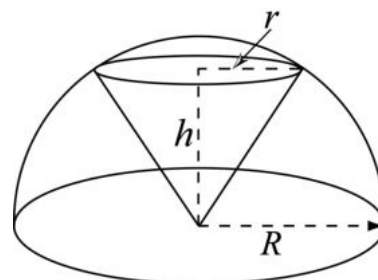
i té la primera coordenada no nul·la. Calculeu les coordenades del vèrtex  $R$ .

[2 punts]

5. En una semiesfera de radi  $R$  inscrivim un con situant el vèrtex al centre de la semiesfera, tal com es veu en el dibuix.

a) Sabent que el volum d'un con és igual a l'àrea de la base multiplicada per l'altura i dividida per 3, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} (R^2 - h^2)$$



b) Trobeu les dimensions d'aquest con (el radi de la base i l'altura) perquè el seu volum sigui màxim i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

6. Sigui  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta  $r: y = x + 3$  en el punt d'abscissa  $x = -1$ , i que en el punt d'abscissa  $x = 1$  la recta tangent és paral·lela a la recta  $r$ .

Calculeu el valor dels paràmetres  $a$ ,  $b$  i  $c$ .

[2 punts]



## Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

---

### Matemàtiques

#### Sèrie 5

---

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

---

1. Siguin  $\pi_1$  el pla  $2x + 3y - z = 4$  i  $\pi_2$  el pla  $x - 2y - 4z = 10$ .
- Comproveu que els plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$  són perpendiculars.
  - Trobeu l'equació contínua de la recta paral·lela als plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$  i que passa pel punt  $P = (-1, 3, 2)$ .

[1 punt per cada apartat]

2. La matriu de coeficients d'un sistema d'equacions lineals homogeni és

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{bmatrix}$$

- Per a quins valors del paràmetre  $a$  el sistema té una sola solució? Quina és aquesta solució única?
- Resoleu el sistema si  $a = 2$ .

[1 punt per cada apartat]

3. Donats els punts  $P = (1, -1, 2)$ ,  $Q = (2, 0, 1)$  i  $R = (3, 2, -1)$ ,
- Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma  $Ax + By + Cz + D = 0$ ) del pla que determinen.

- Trobeu un punt  $S$  pertanyent a la recta  $r: \frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{-3}$ , de manera que el

tetraedre de vèrtexs  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  i  $S$  tingui un volum igual a  $1/2$ .

[1 punt per cada apartat]

4. Per a  $x \geq 1$ , considereu la funció  $f(x) = +\sqrt{x-1}$ .
- Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de  $f(x)$  en el punt d'abscissa igual a 10.
  - Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de  $f(x)$ , la recta d'equació  $x = 5$  i l'eix  $OX$ .
- [1 punt per cada apartat]

5. Considereu els punts  $A = (-1, 2, 4)$  i  $B = (3, 0, -2)$ .
- Trobeu l'equació del pla format per tots els punts que equidisten de  $A$  i  $B$ .
  - Donat un punt  $C = (x, y, z)$ , dividim el segment  $\overline{AC}$  en tres parts iguals i obtenim els punts  $A_1, B$  i  $C$ . Trobeu el punt  $C$ .
- [1 punt per cada apartat]

6. Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex  $A$  en l'origen de coordenades, el vèrtex  $B = (x, 0)$  en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex  $C$  pertany a la recta  $x + 2y = 8$ . L'angle recte és el que correspon al vèrtex  $B$ .
- Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar de la manera següent:  $A(x) = 2x - \frac{x^2}{4}$ .
  - Trobeu els vèrtexs  $B$  i  $C$  perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.
- [1 punt per cada apartat]

