

## Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2014

---

### Matemàtiques

#### Sèrie 3

---

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

---

1. Considereu la matriu  $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$ , per a  $a \in \mathbb{R}$ .

a) Calculeu el rang de la matriu  $M$  en funció dels valors del paràmetre  $a$ .

[1 punt]

b) Discutiu i resoleu el sistema d'equacions lineals

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

segons els valors del paràmetre  $a$ .

[1 punt]

2. Considereu el punt  $A = (1, 2, 3)$ .

a) Calculeu el punt simètric del punt  $A$  respecte de la recta d'equació

$$r: (x, y, z) = (3 + \lambda, 1, 3 - \lambda).$$

[1 punt]

b) Calculeu el punt simètric del punt  $A$  respecte del pla que té per equació

$$\pi: x + y + z = 3.$$

[1 punt]

3. Un nedador és al mar en un punt  $N$ , situat a 3 km d'una platja recta, i just al davant d'un punt  $S$ , situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt  $A$ , situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt  $S$ , de manera que el triangle  $NSA$  és rectangle en el vèrtex  $S$ . El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.
- a) Si  $P$  és un punt entre el punt  $S$  i el punt  $A$  que està a una distància  $x$  de  $S$ , demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt  $N$  al punt  $P$  i caminar

des del punt  $P$  fins al punt  $A$  és determinat per l'expressió  $t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \frac{6 - x}{5}$ .

[1 punt]

- b) Calculeu el valor de  $x$  que determina el temps mínim que cal per a anar del punt  $N$  al punt  $A$ , passant per  $P$ . Quin és el valor d'aquest temps mínim?

[1 punt]

4. Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions  $y = x^2$ ,  $y = 4x^2$  i  $y = 9$ .

[2 punts]

5. Sigui  $r$  i  $s$  les rectes de  $\mathbb{R}^3$  d'equacions  $r: \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$  i  $s: (x, y, z) = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha)$ , amb  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- a) Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta  $r$  i l'altre extrem situat sobre la recta  $s$  formen un pla.

[1 punt]

- b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma  $Ax + By + Cz = D$ ) del pla de l'apartat anterior.

[1 punt]

6. Responen a les qüestions següents:

- a) Demostreu que si  $A$  és una matriu quadrada que satisfà la igualtat  $A^2 = I$ , on  $I$  és la matriu identitat, aleshores  $A$  és invertible i  $A^{-1}$  satisfà  $(A^{-1})^2 = I$ .

[1 punt]

- b) Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$  amb  $b \neq 0$  que satisfan la igualtat  $A^2 = I$ .

[1 punt]



Institut  
d'Estudis  
Catalans

## Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2014

---

### Matemàtiques

#### Sèrie 4

---

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

---

1. Considereu la funció  $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ .

a) Calculeu les asímptotes verticals, horitzontals i obliqües de la funció  $f$ .

[1 punt]

b) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció  $f$  en aquells punts en què la recta tangent sigui paral·lela a la recta  $y = -5x + 4$ .

[1 punt]

2. Responeu a les qüestions següents:

a) Discuti el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} (k-1)y + (k^2-1)z = 0 \\ (4k+1)x - y - 7z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

en funció dels valors de  $k$ .

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per a  $k = 1$ .

[1 punt]

3. Siguin els punts  $P = (1, 1, 0)$ ,  $Q = (1, 0, 1)$  i  $R = (0, 1, 1)$  i el pla  $\pi: x + y + z = 4$ .

a) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma  $Ax + By + Cz = D$ ) del pla que passa pels punts  $P$ ,  $Q$  i  $R$ .

[1 punt]

b) Si  $S$  és un punt de  $\pi$ , comproveu que el volum del tetraedre de vèrtexs  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  i  $S$  no depèn del punt  $S$ .

[1 punt]

4. Donats els plans  $\pi_1: x - 4y + z = 2m - 1$  i  $\pi_2: 2x - (2m + 2)y + 2z = 3m + 1$ ,
- a) Determineu els valors de  $m$  perquè els plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$  s'intersequin en una recta i calculeu un vector director de la recta resultant que no depengui de  $m$ .  
[1 punt]
- b) Sigui el pla  $\pi: 3x - 2y + 3z = 8$ . Estudieu la posició relativa del pla  $\pi$  amb la recta  $r$  definida per la intersecció dels plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$  quan  $m = 1$ .  
[1 punt]

5. Responen a les qüestions següents:

- a) Si  $A$  i  $B$  són dues matrius quadrades d'ordre  $n$ , demostreu que

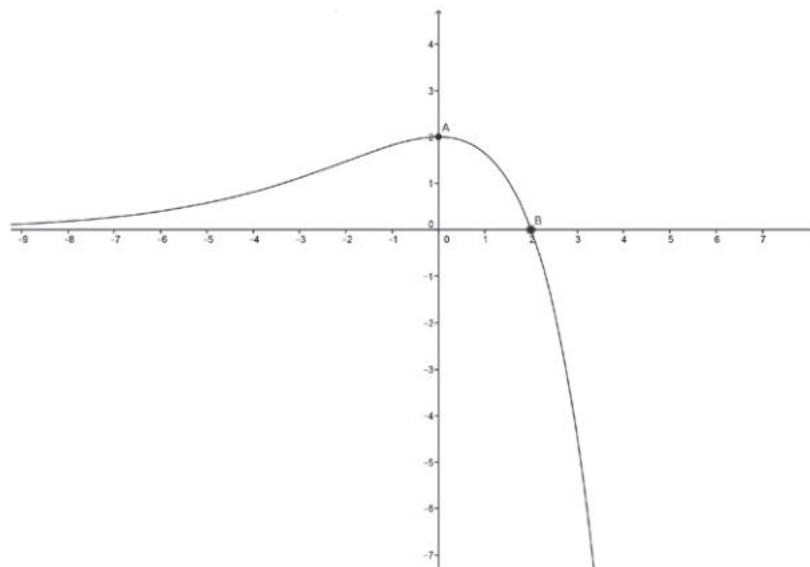
$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA.$$

[1 punt]

- b) Si  $M_1$  i  $M_2$  són dues matrius de la forma  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , amb  $a, b \in \mathbb{R}$ , comproveu que el producte  $M_1 \cdot M_2$  té també la mateixa forma i que  $M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1$ .  
[1 punt]

6. Responen a les qüestions següents:

- a) La funció  $f(x) = (b - x)e^{ax}$ , amb  $a$  i  $b$  constants, té la representació gràfica següent



i sabem que passa pels punts  $A = (0, 2)$  i  $B = (2, 0)$ , i que en el punt  $A$  la recta tangent a la gràfica és horitzontal. Calculeu els valors de  $a$  i  $b$ .

[1 punt]

- b) Calculeu  $\int_1^2 x \ln x \, dx$ .

[1 punt]



Institut  
d'Estudis  
Catalans