

# Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2015

---

## Matemàtiques

### Sèrie 5

---

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

---

1. Sigui la matriu  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$ .

a) Determineu per a quins valors de  $a$  existeix  $A^{-1}$ .

[1 punt]

b) Calculeu  $A^{-1}$  per a  $a = 0$ .

[1 punt]

2. A l'espai tridimensional considereu la recta  $r: (x, y, z) = (3 + 2\alpha, -\alpha, 3 - \alpha)$  i els plans  $\pi_1: x + y + z = -1$  i  $\pi_2: (x, y, z) = (2 + \lambda, 1 - \lambda + \mu, \mu)$ .

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma  $Ax + By + Cz = D$ ) del pla  $\pi_2$ .

[1 punt]

b) Trobeu els dos punts de la recta  $r$  que equidisten dels plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$ .

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades  $(x_0, y_0, z_0)$  al pla d'equació

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ amb l'expressió } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3. Sigui la funció  $f(x) = e^x - x - 2$ .

a) Demostreu que la funció  $f$  té una arrel (un zero) en l'interval  $[0, 2]$ .

[1 punt]

b) Comproveu que la funció és monòtona en l'interval  $[0, 2]$  i calculeu les coordenades dels punts mínim absolut i màxim absolut de la funció en aquest interval.

[1 punt]

4. Siguin els plans de  $\mathbb{R}^3$   $\pi_1: -y + z = 2$ ,  $\pi_2: -2x + y + z = 1$  i  $\pi_3: 2x - 2z = -1$ .
- a) Calculeu la posició relativa dels tres plans.  
[1 punt]
- b) Comproveu que el pla  $\pi_3$  és paral·lel a la recta definida per la intersecció dels plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$ .  
[1 punt]
5. Siguin  $x$  i  $y$  les mesures dels costats d'un rectangle inscrit en una circumferència de diàmetre 2.
- a) Comproveu que la superfície del rectangle, en funció de  $x$ , és donada per l'expressió
- $$S(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}.$$
- [1 punt]
- b) Calculeu els valors de les mesures  $x$  i  $y$  per als quals la superfície del rectangle és màxima i calculeu el valor d'aquesta superfície màxima.  
[1 punt]
6. Trobeu totes les matrius de la forma  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$  que siguin inverses d'elles mateixes, és a dir, que  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  
[2 punts]

