

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y + 4z = 4k - 7 \\ 2x - ky = -1 \\ -2x = k + 1 \end{array} \right\}$$

a) Discuti el sistema per als diferents valors del paràmetre real k .

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k = 0$.

[1 punt]

2. A \mathbb{R}^3 , siguin la recta r que té per equació $(x, y, z) = (1 + \lambda, \lambda, 1 - \lambda)$ i el pla π d'equació $2x - y + z = -2$.

a) Determineu la posició relativa de la recta r i el pla π .

[1 punt]

b) Calculeu la distància entre la recta r i el pla π .

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ amb l'expressió } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3. Sigui la funció $f(x) = x e^{x-1}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 1$.

[1 punt]

b) Determineu en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent.

[1 punt]

4. Responen a les qüestions següents:

a) Calculeu totes les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ que satisfan la igualtat

$$A^2 + A = 2I, \text{ en què } I \text{ és la matriu identitat, } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1 punt]

b) Justifiqueu que si A és una matriu quadrada que compleix la igualtat $A^2 + A = 2I$, aleshores A és invertible, i calculeu l'expressió de A^{-1} en funció de les matrius A i I .

[1 punt]

5. Considereu el tetraedre que té per vèrtexs els punts $A = (x, 0, 1)$, $B = (0, x, 1)$, $C = (3, 0, 0)$ i $D = (0, x, 0)$, amb $0 < x < 3$.

a) Comproveu que el volum del tetraedre és donat per l'expressió $V(x) = \frac{1}{6}(-x^2 + 3x)$.

[1 punt]

b) Determineu el valor de x que fa que el volum sigui màxim i calculeu aquest volum màxim.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular el volum del tetraedre de vèrtexs A , B , C i D amb l'expressió

$$\frac{1}{6} |\det(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|.$$

6. Siguin les paràboles $f(x) = x^2 + k^2$ i $g(x) = -x^2 + 9k^2$.

a) Calculeu les abscisses, en funció de k , dels punts d'intersecció entre les dues paràboles.

[1 punt]

b) Calculeu el valor del paràmetre k perquè l'àrea compresa entre les paràboles sigui de 576 unitats quadrades.

[1 punt]



Institut
d'Estudis
Catalans



Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$
 Expliqueu

raonadament si les afirmacions següents són vertaderes o falses:

a) Si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, el sistema és compatible determinat i la solució és $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

[1 punt]

b) Si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, el sistema és compatible indeterminat.

[1 punt]

2. Siguin a \mathbb{R}^3 el pla π d'equació $x - y + 2z = 2$ i els punts $A = (3, -1, 2)$ i $B = (1, 1, -2)$.

a) Comproveu que els punts A i B són simètrics respecte del pla π .

[1 punt]

b) Si r és la recta dels punts P que té per equació $P = B + \lambda v$, en què λ és un paràmetre real i $v = (1, 1, 0)$, verifiqueu que els punts mitjans dels segments AP pertanyen al pla π .

[1 punt]

3. Responen a les qüestions següents:
- a) Calculeu els màxims relatius, els mínims relatius i els punts d'inflexió de la funció $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.
[1 punt]
- b) Expliqueu raonadament que si $f(x)$ és una funció amb la derivada primera contínua en l'interval $[a, b]$ i satisfà que $f'(a) > 0$ i $f'(b) < 0$, aleshores hi ha, com a mínim, un punt de l'interval (a, b) en què la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en aquest punt és horitzontal.
[1 punt]
4. Sigui A una matriu quadrada d'ordre n que satisfà la igualtat $A \cdot (A - I) = I$, en què I és la matriu identitat.
- a) Justifiqueu que la matriu A és invertible i que $A^{-1} = A - I$.
[1 punt]
- b) Calculeu el valor de a que fa que la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ compleixi la igualtat $A \cdot (A - I) = I$. Calculeu A^{-1} i comproveu que es correspon amb la matriu calculada a partir del resultat de l'apartat anterior.
[1 punt]
5. Siguin les rectes $r: (x, y, z) = (2, 3, -3) + \lambda(1, -1, 0)$ i $s: \frac{x-3}{2} = y-5 = z+2$.
- a) Estudieu si les rectes r i s són paral·leles o perpendiculars.
[1 punt]
- b) Determineu la posició relativa de les rectes r i s i calculeu l'equació paramètrica de la recta t que talla perpendicularment la recta r i la recta s .
[1 punt]
6. Sabem que una funció $f(x)$ té per derivada $f'(x) = (x+1)e^x$ i que $f(0) = 2$.
- a) Trobeu l'equació de la recta tangent a $y = f(x)$ en el punt de la corba d'abscissa $x = 0$.
[1 punt]
- b) Calculeu l'expressió de $f(x)$.
[1 punt]