

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre λ :

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

- a) Estudieu per a quins valors del paràmetre λ el sistema és incompatible.

[1 punt]

- b) Resoleu el sistema per al cas $\lambda = 1$.

[1 punt]

2. Considereu els plans $\pi_1: 5x - y - 7z = 1$ i $\pi_2: 2x + 3y + z = 5$.

- a) Determineu l'equació general (és a dir, la que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa per l'origen de coordenades i és perpendicular als plans π_1 i π_2 .

[1 punt]

- b) Calculeu l'angle que formen els plans π_1 i π_2 .

[1 punt]

3. Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x^2 - k}$, en què k és un paràmetre real diferent de 0. Per als

diferents valors del paràmetre k :

- a) Calculeu el domini i les asímptotes de la funció.

[1 punt]

- b) Calculeu els punts amb un màxim o un mínim relatiu.

[1 punt]

4. Sabem que el sistema d'equacions lineals següent té una única solució:

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + az = 1 \\ y + z = a \end{cases}$$

a) Comproveu que $a \neq 0$.

[1 punt]

b) Trobeu la solució del sistema en funció del paràmetre a .

[1 punt]

5. Considereu les matrius quadrades d'ordre 2 de la forma $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2 + 1 & x \end{pmatrix}$, amb x i y nombres reals.

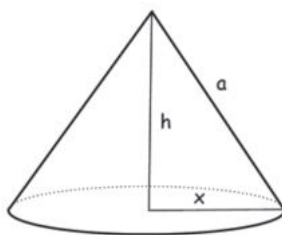
a) Comproveu que la matriu M és sempre invertible, independentment dels valors de x i de y .

[1 punt]

b) Per a $x = 1$ i $y = -1$, calculeu M^{-1} .

[1 punt]

6. Considereu un con de 120 cm^3 de volum que té una altura h , un radi de la base x i una aresta a , com el de la figura següent:



a) Comproveu que $a^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$.

[1 punt]

b) Calculeu l'altura del con que té l'aresta de longitud mínima.

[1 punt]

NOTA: Recordeu que el volum del con és un terç del volum del cilindre recte que té la mateixa base i la mateixa altura que el con.

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 5

Responen a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Siguin les rectes de \mathbb{R}^3 $r: \begin{cases} 2x - y = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ i $s: x + 1 = \frac{y - 2}{2} = z - 1$.

a) Comproveu que són paral·leles.

[1 punt]

b) Calculeu l'equació vectorial del pla que les conté.

[1 punt]

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + kz = 1 \\ x + (k + 1)y + z = k^2 - 4 \end{cases}$$

en què k és un paràmetre real.

a) Discutiueu el sistema per als diferents valors de k .

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k = -2$.

[1 punt]

3. Responen a les qüestions següents:

a) Comproveu que la recta tangent a la corba $y = x^2$ en el punt d'abscissa $x = 2$ és la recta $y = 4x - 4$ i calculeu els punts d'intersecció d'aquesta recta amb els eixos de coordenades.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea limitada per la corba de l'apartat anterior, la recta tangent en $x = 2$ i l'eix de les abscisses.

[1 punt]

4. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu les potències A^2 , A^3 i A^6 .

[1 punt]

b) Calculeu la inversa de la matriu A^5 .

[1 punt]

5. Sigui $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$ la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals.

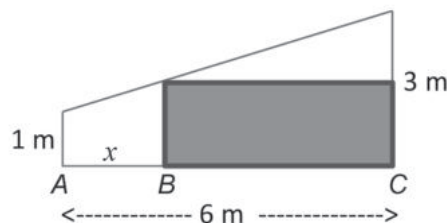
a) Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre a , i interpreteu el resultat geomètricament.

[1 punt]

b) Per a $a = 1$ trobeu la forma paramètrica del pla solució i doneu un punt i dos vectors directores d'aquest pla.

[1 punt]

6. El croquis de sota representa la paret d'unes golfes amb el sostre inclinat, en la qual es vol construir un armari rectangular com el de la zona ombrejada.



a) Expresses l'àrea del rectangle en funció de la longitud x del segment AB .

[1 punt]

b) Determineu les dimensions del rectangle si volem que tingui una superfície màxima i calculeu aquesta superfície màxima.

[1 punt]



Institut
d'Estudis
Catalans