SÈRIE 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que permetin emmagatzemar dades o que puguin transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i s'han de comprendre els passos que ha fet. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o aquells casos en què no es pugui seguir com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuats amb 0 punts.**
2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta, se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial, la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
3. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.
5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

- Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
- En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
- En el cas que l'errada faci que alguna de les qüestions que es demanen no tingui sentit, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
- Si la resolució d'un apartat conté dues errades, la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ a cometre la segona errada.

1. Considereu la funció polinòmica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$.
   a) Calculeu els valors dels paràmetres *a*, *b* i *c*, sabent que la funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 1$ i que la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt d'abscissa $x = 0$ és la recta $y = x + 3$.
   [1 punt]
   b) Per als valors $a = 2$, $b = 1$ i $c = 3$, calculeu les abscisses dels extrems relatius de la funció i classifiqueu-los
   [1 punt]

Resolució:

a) A partir de $f'(x) = 3x^2 - 2ax + b$ i de la recta tangent $y = x + 3$, obtenim que $f(0) = 3$ i $m = f'(0) = 1$.
Les condicions per a la funció *f* en els punts d'abscissa 1 i 0 són:

$$\begin{cases} f'(1) = 3 - 2a + b = 0 \\ f'(0) = b = 1 \qquad \Rightarrow a = 2 \\ f(0) = c = 3 \end{cases}$$

b) La funció és $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$
Si fem $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$, les abscisses dels possibles extrems són $x = 1$ i $x = \frac{1}{3}$.

Amb la segona derivada $f''(x) = 6x - 4$ deduïm:

- $f''(1) = 2 > 0$, per tant, hi ha $\boxed{\text{un mínim relatiu en } x = 1}$
- $f''\left(\frac{1}{3}\right) = 2 - 4 < 0$, per tant, hi ha $\boxed{\text{un màxim relatiu en } x = \frac{1}{3}}$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per la funció derivada.
0,25 punts per la informació a partir de la recta tangent.
0,25 punts pel plantejament de les condicions.
0,25 punts pel càlcul dels valors dels tres paràmetres.

b)
0,25 punts per la funció i la seva derivada.
0,25 punts pel càlcul dels candidats a extrems relatius.
0,25 punts per la classificació de $x = 1$.
0,25 punts per la classificació de $x = 1/3$.

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+ay=2a \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $a = 1$.
[1 punt]

Resolució:

a) La matriu de coeficients i l'ampliada, A i A', són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ \underbrace{2 \quad a \quad 0}_{A} & & & 2a \end{array}\right)}_{A'}$$

Calculem det(A) = 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = 2a-4$$

Que s'anul·la per a $a = 2$

- $\boxed{\text{Cas } a \neq 2}$. Rang(A) = Rang(A') = 3 = nombre d'incògnites. Per tant, és un $\boxed{\text{SCD}}$.

- $\boxed{\text{Cas } a = 2}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ \underbrace{2 \quad 2 \quad 0}_{A} & & & 4 \end{array}\right)}_{A'}$$

S'observa que les dues primeres columnes són iguals. Per tant, tots els menors que les incloguin valdran zero. A partir d'aquí, l'únic determinant d'ordre 3 que cal considerar a A' és

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, que també val zero; per tant, rang(A') < 3. Com que el menor de A $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, aleshores rang(A) = rang(A') = 2 < 3 = nombre d'incògnites, i per tant, és un $\boxed{\text{SCI amb } (3 - 2 = 1) \text{ un grau de llibertat}}$.

b) El sistema es pot resoldre per determinants o bé de manera tradicional (igualació/substitució/reducció). És un sistema $\boxed{\text{compatible determinat amb solució } x = 0,\ y = 2 \text{ i } z = 1.}$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel plantejament matricial de la discussió.
0,25 punts pel càlcul del valor singular a discutir.
0,25 punts pel cas $a \neq 2$.
0,25 punts pel cas $a = 2$.

b)
0,25 punts per identificar que el sistema és SCD.
0,25 punts pel valor de x.
0,25 punts pel valor de y.
0,25 punts pel valor de z.

3. Considereu el pla de vectors directors $u = (-1, 3, 2)$ i $v = (2, 1, 0)$ i que passa pel punt $A = (1, 0, 3)$.

   a) Calculeu l'equació de la recta que és perpendicular al pla i passa pel punt A.
   [1 punt]

   b) Calculeu la distància del punt $P = (1, 5, 0)$ al pla.
   [1 punt]

   Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Resolució:

a) El vector director de la recta perpendicular al pla és:

$$\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2i + 4j - 7k = (-2, 4, -7)$$

Per tant, l'equació vectorial de la recta serà $\boxed{(x, y, z) = k\cdot(-2, 4, -7) + (1, 0, 3).}$

b) L'equació general del pla és:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad -2x + 4y - 7z + 23 = 0$$

La distància al punt P és: $d(P, pla) = \frac{|-2\cdot 1+4\cdot 5-7\cdot 0+23|}{\sqrt{(-2)^2+4^2+(-7)^2}} = \frac{41}{\sqrt{69}} = \boxed{\frac{41\sqrt{69}}{69}\ u} = \boxed{4{,}94\ u}$

Pautes de correcció:

a)
0,5 punts pel vector normal al pla.
0,5 punts per l'equació de la recta.

b)
0,5 punts per l'equació del pla.
0,5 punts pel càlcul de la distància.

4. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, en què α és un paràmetre real.
   a) Hi ha algun valor de $\alpha \in R$ tal que A no tingui inversa per a aquest valor?
   [1 punt]
   b) Calculeu la matriu inversa de A^2 per a $\alpha = 0$.
   [1 punt]

Resolució:

a) La matriu A no tindrà inversa si i només si el determinant de A és 0.

Fem el determinant de la matriu A:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha^2 - 1 = 0$. No té solució real.

Això vol dir que la matriu A té inversa per qualsevol valor de α.

Comentari: És molt possible que hi hagi alumnes que s'equivoquin al resoldre l'equació i donin com a solució que A no té inversa quan $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$. Aquest error no afectarà l'apartat b.

b) Ara fem $\alpha = 0$ i busquem la matriu A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Per a veure que A^2 té inversa, comprovem que té determinant diferent de zero.

Efectivament, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

La matriu inversa de A^2 és $(A^2)^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per la condició d'inversa.
0,25 punts pel càlcul del determinant.
0,25 punts per la resolució de la igualtat.
0,25 punts per la resposta final al problema.

b)
0,25 punts pel càlcul de la matriu al quadrat.
0,25 punts per la comprovació que la matriu té inversa.
0,25 punts pels càlculs intermedis de la matriu inversa.
0,25 punts per la matriu inversa final.

5. Considereu els punts de l'espai tridimensional $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 5, 0)$ i $C = (1, 0, 0)$ i la recta r: $x = y - 1 = \frac{z}{2}$.
   a) Trobeu el punt d'intersecció de la recta *r* amb el pla que passa pels punts *A*, *B* i *C*.
   [1 punt]
   b) Trobeu els punts *P* de la recta *r* per als quals el tetraedre de vèrtexs *P*, *A*, *B* i *C* té un volum de $2u^3$.
   [1 punt]

   Nota: El volum d'un tetraedre de vèrtexs *P*, *Q*, *R* i *S* es pot calcular amb l'expressió $\frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS})\right|$.

Resolució:

a) L'equació del pla que passa pels punts *A*, *B* i *C* es pot obtenir (a partir, per exemple, del punt *C* i dels vectors directors $\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{CA}$): $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y & 5 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.
D'això en resulta $2z = 0$, o sigui, $\boxed{z = 0}$.

Ara trobem la intersecció amb la recta *r*:

$x = y - 1 = \frac{z}{2}$; per tant, els punts de la recta *r* són de la forma $(x, y, z) = (\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda)$. Com que $z = 0$, obtenim $\lambda = 0$, i per tant, el punt d'intersecció és $\boxed{(0,1,0).}$

b) Els punts *P* de la recta *r* són de la forma $P = (\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda)$.
Calculem el volum del tetraedre: $V = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\right|$; per tant,

$$\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ \lambda + 1 & 1 & 5 \\ 2\lambda & 0 & 0 \end{matrix}\right\| = 2.$$

O sigui, $\frac{1}{6}\ |-4\lambda| = 2$; és a dir, $|\lambda| = 3$, i per tant, hi ha dues solucions: $\lambda = 3\ i\ \lambda = -3$, i d'aquí en resulta $\boxed{P_1 = (3,4,6) \text{ i } P_2 = (-3,-2,-6).}$

Pautes de correcció:

a)
0,5 punts per l'equació del pla.
0,5 punts per la intersecció.
b)
0,25 punts per l'expressió general dels punts de *r*.
0,25 punts pel plantejament de la igualtat.
0,25 punts per un punt solució.
0,25 punts per l'altre punt solució.

6. Siguin les funcions $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = 3 - x^2$,

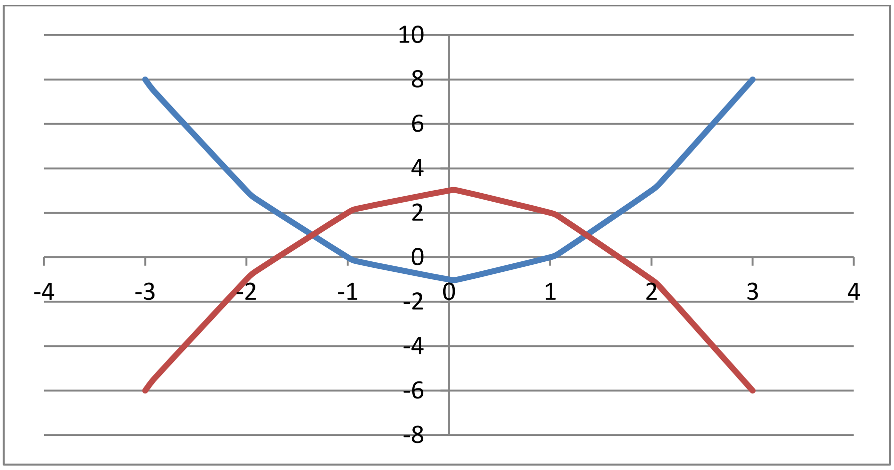
   a) Feu un esbós de les gràfiques de les paràboles $y = f(x)$ i $y = g(x)$ en un mateix sistema d'eixos cartesians i trobeu els punts de tall amb l'eix de les abscisses, els vèrtexs i els punts de tall entre les dues gràfiques.
   [1 punt]

   b) Calculeu l'àrea de la regió del semiplà $y \geq 0$ compresa entre les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$.
   [1 punt]

Resolució:

a) La gràfica de $f(x) = x^2 - 1$ talla l'eix OX en els punts d'abscissa x = 1 i x = −1. Per tant, els punts de tall amb l'eix de les abscisses són $\boxed{(-1, 0) \text{ i } (1, 0)}$.
El vèrtex (mínim) és en el punt mitjà entre les solucions, x = 0, amb ordenada $f(0) = -1$, i per tant, el $\boxed{\text{vèrtex és el punt } (0, -1)}$.
La gràfica de $g(x) = 3 - x^2$ talla l'eix OX en els punts $x = \sqrt{3}$ i $x = -\sqrt{3}$.
Per tant, els punts de tall amb l'eix de les abscisses són $\boxed{(\sqrt{3},\ 0) \text{ i } (-\sqrt{3},\ 0)}$.
El vèrtex (màxim) és en el punt mitjà entre les solucions, x = 0, amb ordenada $g(0) = 3$, i per tant, el $\boxed{\text{vèrtex és el punt } (0, 3)}$.

Calculem els punts de tall entre les dues gràfiques:
$x^2 - 1 = 3 - x^2$
$2x^2 = 4$
$x^2 = 2$
Per tant, els punts de tall són a les abscisses $x = \sqrt{2}$ i $x = -\sqrt{2}$ amb valor $f(\sqrt{2}) = g(\sqrt{2}) = 1$ i $f(-\sqrt{2}) = g(-\sqrt{2}) = 1$. Així doncs, els punts d'intersecció de les gràfiques són $\boxed{(\sqrt{2},\ 1) \text{ i } (-\sqrt{2},\ 1)}$



b) En el dibuix es veu que l'eix OY és un eix de simetria de l'àrea compresa entre les dues gràfiques. Aquest fet ens permet fer el càlcul de l'àrea en el primer quadrant i multiplicar per 2.
Com que ens demanen l'àrea en el semiplà y ≥ 0, el càlcul de l'àrea demanada és:

$$2\int_0^1 (3-x^2)dx + 2\int_1^{\sqrt{2}} ((3-x^2)-(x^2-1))dx =$$

$$= 2\left(3x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 + 2\left(4x-2\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = 2\frac{8}{3} + 2\left(4\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{2}}{3}-4+\frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{16\sqrt{2}-4}{3}\ u^2} =$$

$$= \boxed{6{,}21\ u^2}$$

Comentari: Qualsevol altre càlcul equivalent i correcte serà igualment ben valorat.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per les arrels.
0,25 punts pels vèrtexs.
0,25 punts pels punts intersecció.
0,25 punts per l'esbós.

b)
0,25 punts per les integrals a calcular.
0,25 punts per les primitives.
0,25 punts per l'aplicació correcta de la regla de Barrow.
0,25 punts pel càlcul final de l'àrea.