SÈRIE 4

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

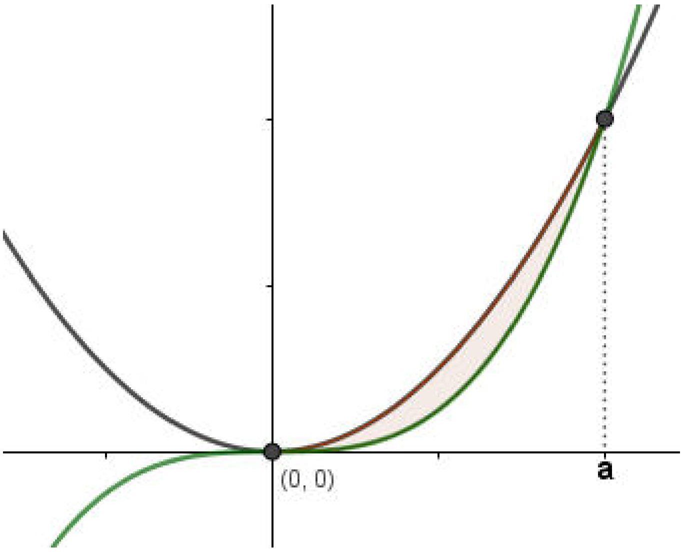
1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
3. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.
5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

- Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
- En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
- En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
- Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1. Siguin les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = a \cdot x^2$, en què a és un nombre real positiu.
   a) Trobeu, en funció del paràmetre a, els punts de tall entre les dues corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$ i feu un esbós de la regió limitada per les dues gràfiques.
   [1,25 punts]
   b) Calculeu el valor d'a perquè l'àrea compresa entre $y = f(x)$ i $y = g(x)$ sigui $\frac{27}{4}$ u^2.
   [1,25 punts]

Resolució:

a)



Igualem les dues funcions i resolem:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 = ax^2$$
$$x^3 - ax^2 = 0$$
$$x^2(x - a) = 0$$
$$x = 0 \text{ i } x = a$$

Els punts de tall són

$$\boxed{(0,0) \text{ i } (a, a^3)}$$

b) L'àrea entre les dues funcions es calcularà amb la integral definida de la diferència de les dues funcions:

$$A = \int_0^a (g(x) - f(x))dx = \int_0^a (ax^2 - x^3)dx = \left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{12}$$

$\frac{a^4}{12} = \frac{27}{4} \Rightarrow a^4 = 81 \ \Rightarrow a = \pm 3.$

Cal descartar el valor a = -3 ja que a ens diu l'enunciat, que és positiu.

Per tant, per a $a = 3$ l'àrea entre les dues funcions és $\frac{27}{4}\ u^2$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel plantejament de la igualtat.
0,25 punts per la solució de l'equació (els valors d'a).
0,25 punts pel punt (0, 0).
0,25 punts pel punt (a, a^3).
0,25 punts per l'esbós.

b) 0,25 punts pel plantejament de la integral definida (en coherència amb l'esbós fet a l'apartat anterior).
0,25 punts pel càlcul de la primitiva.
0,25 punts pel càlcul final de la integral.
0,25 punts pel plantejament de la igualtat.
0,25 punts per la resolució final.

2. Un avió es desplaça des d'un punt $A = (0,3,1)$ cap a una plataforma plana d'equació $\pi: x - 2y + z = 1$ seguint una recta r paral·lela al vector $v = (1, -1,0)$.
   a) Calculeu les coordenades del punt de contacte B de l'avió amb el pla i la distància recorreguda.
   [1,25 punts]
   b) Calculeu l'equació general del pla perpendicular a la plataforma i que conté a la recta r seguida per l'avió des del punt A.
   [1,25 punts]

Resolució:

a) L'equació paramètrica de la recta r és

$$(x, y, z) = (0,3,1) + \lambda\,(1, -1,0) = (\lambda, 3 - \lambda, 1).$$

Per a trobar el punt de contacte cal trobar la intersecció de la recta r amb el pla π:

$$\lambda - 2 \cdot (3 - \lambda) + 1 = 1$$
$$\lambda - 6 + 2\lambda + 1 = 1$$

d'on deduïm que $\lambda = 2$. Per tant, el punt de contacte buscat és $\boxed{B = (2,1,1)}$.

Finalment per a calcular la distància demanada apliquem la fórmula de la distància entre dos punts, els punt $A = (0,3,1)$ i el punt $B = (2,1,1)$, i obtenim

$$dist(A, B) = \sqrt{2^2 + (1 - 3)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}\,u}$$

b) El pla buscat conté com a vectors directors el vector $v = (1, -1,0)$ (vector director de la recta r) i un vector normal al pla π, $n = (1, -2,1)$. Per tant, per a obtenir un vector normal al pla buscat calculem

$$n \times v = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

Per tant, el pla buscat té equació de la forma $x + y + z = k$ on k és un paràmetre real. Com que el punt A pertany al pla buscat, tenim $0 + 3 + 1 = k$ i, per tant, l'equació demanada del pla és $\boxed{x + y + z = 4}$.

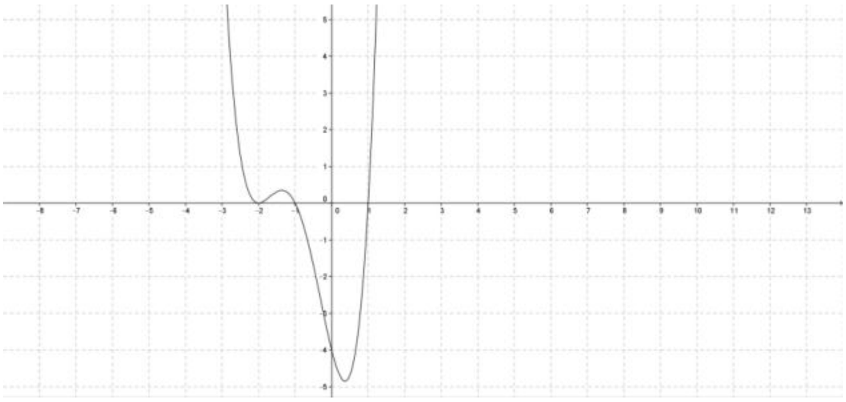
Observació: Qualsevol altra manera equivalent i correcta serà també donada per resposta correcta.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per l'equació paramètrica (o equivalent) de la recta *r*.
0,25 punts pel punt intersecció de la recta i el pla.
0,25 punts pel plantejament de la distància.
0,25 punts pel vector entre els dos punts.
0,25 punts per la distància final.

b) 0,25 punts pels elements del pla.
0,25 punts pel vector normal del pla.
0,25 punts pel plantejament de l'equació el pla.
0,25 punts pel càlcul del valor del terme independent.
0,25 punts per l'equació general del pla.

3. Sigui $f(x)$ una funció derivable la gràfica de la qual passa pel punt (0, 1). La gràfica de la seva derivada, $f'(x)$, és la que es mostra en la figura.



a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 0$.
[1,25 punts]

b) Trobeu les abscisses dels punts singulars de la funció $f(x)$ i classifiqueu-los.
[1,25 punts]

Resolució:

a) L'equació de la recta tangent en $x = 0$ és $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

Mirant la gràfica de $f'(x)$ podem veure que $f'(0) = -4$ i l'enunciat ens indica que $f(0) = 1$ ja que $f(x)$ passa pel punt $(0,1)$. Per tant, l'equació de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$ és $y = -4(x - 0) + 1$ o, el que és el mateix, $\boxed{y = -4x + 1}$.

b) Els punts singulars són aquells on s'anul·la la derivada; per tant, només cal veure els punts de tall de $f'(x)$ amb l'eix d'abscisses, és a dir, les x que compleixen que $f'(x) = 0$.

Observant la gràfica de $f'(x)$ observem que $f'(-2) = 0, f'(-1) = 0$ i $f'(1) = 0$. Així tenim que $f(x)$ presenta punts singulars en $\boxed{x = -2, x = -1 \text{ i } x = 1}$.

Ara només cal classificar-los.

Observem que en $x = -2$, la recta tangent a la funció derivada és horitzontal, és a dir, que $f''(-2) = 0$ i, per tant, $x = -2$ és una abscissa candidata a presentar una inflexió. Donat que $f'(x) > 0$ en l' interval $(-\infty, -2)$ i també $(-2, -1)$, això implica que $f(x)$ és creixent en aquests intervals. Per altra banda, abans de -2 la funció derivada es decreixent, és a dir, amb derivada negativa (o sigui $f''(x) < 0$) i després de -2 la funció derivada és creixent, és a dir, amb derivada positiva (o sigui $f''(x) > 0$). Això indica que en el punt $x = -2$ hi ha efectivament un canvi de concavitat i, per tant, en $x = -2$ la funció $f(x)$ presenta un punt d'inflexió de tangent horitzontal.

Donat que $f'(x) > 0$ en l' interval $(-2, -1)$ i $f'(x) < 0$ a $(-1,1)$, ens indica que $f(x)$ és creixent a l'interval $(-2, -1)$ i és decreixent a $(-1,1)$, motiu pel qual podem concloure que en $x = -1$ la funció $f(x)$ presenta un màxim relatiu.

Finalment, en el punt d'abscissa $x = 1$ $f(x)$ presenta un mínim relatiu ja que $f(x)$ és decreixent a l'interval $(-1,1)$, atès que $f'(x) < 0$ en aquest interval, i $f(x)$ és creixent a $(1, +\infty)$ atès que $f'(x) > 0$ en aquest interval

$x = -2$ Punt d'inflexió amb recta tangent horitzontal
$x = -1$ màxim relatiu
$x = 1$ mínim relatiu

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la fórmula de la recta tangent.
   0,25 punts per la identificació del pendent.
   0,25 punts per la identificació de l'ordenada.
   0,25 punts per la substitució en l'expressió de la recta tangent.
   0,25 punts per l'expressió final de la recta tangent.

b) 0,25 punts per la identificació de les tres abscisses.
   0,5 punts per la classificació justificada de la inflexió.
   0,25 punts per la classificació justificada del màxim relatiu.
   0,25 punts per la classificació justificada del mínim relatiu.

4. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

   a) Estudieu el rang de la matriu A per als diferents valors del paràmetre a.

   [1,25 punts]

   b) Comproveu que per a $a = 4$ la matriu A és invertible i que es verifica que $A^{-1} = A^2$.

   [1,25 punts]

Resolució:

a) Estudiarem el rang de la matriu A a partir dels valors que fan que el rang sigui màxim, 3 en aquest cas, que és quan no s'anul·la el determinant de la matriu.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + 7a - 3 + a - 12 = -a^2 + 8a - 15$$

$$|A| = -a^2 + 8a - 15 = 0 \rightarrow a = 3 \;\text{ i }\; a = 5$$

- Quan $a \neq 3$ i $a \neq 5 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow rang(A) = 3$
- Quan $a = 3, rang(A) < 3$ ja que $det(A) = 0$.

$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Es veu clarament que dues files qualssevol d'aquesta matriu són independents, perquè no són proporcionals, per tant $rang(A) = 2$.

Anàlogament, qualsevol menor d'ordre 2 no nul també justifica que $rang(A) = 2$.

- Quan $a = 5, rang(A) < 3$, ja que $det(A) = 0$.

$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. De manera anàloga al cas anterior $rang(A) = 2$.

Com abans, qualsevol menor d'ordre 2 no nul també justifica que $rang(A) = 2$.

b) Per al cas $a = 4$ tenim $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ i pel que hem vist a l'apartat anterior la matriu A té rang 3, per tant, és invertible, és a dir que existeix A^{-1}.

Observació: La invertibilitat de la matriu A també es pot demostrar procedint al càlcul de la matriu inversa i veient que es pot dur a terme.

Per a comprovar que la matriu A^2 és la matriu inversa A^{-1}, és suficient comprovar que $A \cdot A^2 = I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

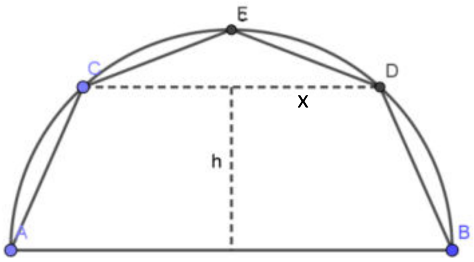
Que és el que volíem veure.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel determinant.
   0,25 punts pels valors a discutir.
   0,75 punts per la discussió del 3 casos (0,25 punts cada cas).

b) 0,5 punts per la justificació que A és invertible.
   0,25 punts pel plantejament de la comprovació.
   0,25 punts pel càlcul de la matriu A^2.
   0,25 punts per la comprovació del producte.

5. Una empresa està treballant en el disseny d'unes càpsules de cafè. L'empresa ha construït la secció transversal de les càpsules inscrivint-la en una semicircumferència de radi 1, traçant una corda CD paral·lela al diàmetre AB i incorporant el punt E en el punt mitjà de l'arc CD. D'aquesta manera queda traçat el pentàgon ACEDB, tal com es mostra en la figura.



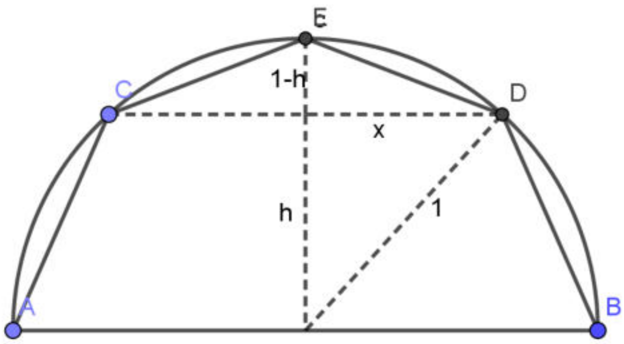
a) Expresseu en funció de x i h l'àrea del pentàgon ACEDB.
[1,25 punts]

b) Quina ha de ser la distància (indicada a la figura per h) a què s'ha de situar la corda CD de AB per tal que l'àrea del pentàgon ACEDB sigui màxima?
[1,25 punts]

Resolució:

a) Si anomenem x a la meitat de la longitud de la corda CD, aleshores tenim que

$$x = \sqrt{1^2 - h^2}$$



L'àrea del pentàgon és l'àrea del trapezi ACDB més l'àrea del triangle CED.

$$\boxed{A(h,x)} = \frac{(2x+2)\cdot h}{2} + \frac{2x\cdot(1-h)}{2} = (x+1)\cdot h + x(1-h) \boxed{= h + x}$$

b) Formuleu l'àrea en termes només h.

Com que $x = \sqrt{1^2 - h^2}$, tenim que $A(h) = h + \sqrt{1-h^2}$.

Ara cal calcular i resoldre $A'(h) = 0$.

$$A'(h) = 1 + \frac{-2h}{2\sqrt{1-h^2}} = 1 - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} = 0.$$

Tenim que $1 = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$; $\sqrt{1-h^2} = h$, $h^2 = 1/2$ i per tant $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (considerem només la solució positiva pel context del problema).

Mirant el signe de la derivada $A'(h)$ a l'entorn del punt singular $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$ podem classificar el punt singular.

Com que $A'(0,5) = 0,4226 > 0$ i $A'(0.8) = -0.333 < 0$, la funció àrea creix abans i decreix després del punt singular, és a dir, que hi ha un màxim en $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Per tant, la corda s'ha de situar a distància $\frac{\sqrt{2}}{2}$, perquè l'àrea sigui màxima.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la representació gràfica.
   0,25 punts per la relació entre x i h.
   0,25 punts per l'expressió de la part trapezoidal.
   0,25 punts per l'expressió de la part triangular.
   0,25 punts per l'expressió final de la funció àrea en dos paràmetres (x i h).

b) 0,25 punts per l'expressió de la funció àrea a maximitzar, amb un sol paràmetre (h).
   0,25 punts per la funció derivada.
   0,25 punts pel punt singular.
   0,5 punts per la comprovació de màxim.

6. Siguin les rectes *r* i *s*, expressades per $\frac{x-3}{2} = y = z - 1$ i $(\mu, -\mu, \mu)$, respectivament.
   a) Determineu la posició relativa de les rectes.
   [1,25 punts]
   b) Calculeu la distància entre la recta *r* i la recta *s*.
   [1,25 punts]

Resolució:

a) Determinem un vector director de cada recta per a saber si són vectors linealment dependents (coincidents o paral·leles) o linealment independents (secants o que es creuen).
$v_r = (2,1,1)$ i $v_s = (1,-1,1)$.
Com que no són proporcionals, són vectors linealment independents. Per tant, les dues rectes o bé són secants (s'intersecten en un punt comú) o bé es creuen.

Verifiquem si són secants buscant la intersecció de *r* i *s*. Per això, substituint un punt genèric de la recta *s* en la recta *r*:

$$\frac{\mu - 3}{2} = -\mu = \mu - 1$$

De la primera igualtat: $\mu - 3 = -2\mu \Rightarrow \mu = 1$

De la segona igualtat: $-\mu = \mu - 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2}$

Com que s'obtenen valors diferents per al paràmetre μ, no hi ha punt intersecció i per tant $\boxed{\text{les rectes } r \text{ i } s \text{ es creuen}}$.

Observació: Qualsevol altra manera equivalent i correcta serà també donada per resposta correcta.

b) En aquest cas en què les rectes es creuen la distància entre elles la calcularem com a distància d'un punt d'una recta al pla paral·lel que conté l'altra recta, és a dir:
d(s, r) = d(Ps, π), on *π* és el pla que conté la recta *r* i és paral·lel a la recta *s*.

Els vectors directors del pla seran $v_r = (2,1,1)$ i $v_s = (1,-1,1)$.

El seu producte vectorial ens dona el vector normal al pla:

$$n = v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & 2 & 1 \\ j & 1 & -1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,-3) = (A,B,C)$$

Ara amb un punt de la recta *r*, $P_r = (3,0,1)$ construïm l'equació del pla:

$$\pi: 2(x-3) - 1(y-0) - 3(z-1) = 0 \Rightarrow \pi: 2x - y - 3z - 3 = 0$$

La distància serà:

$$d(s,r) = d(P_s,\pi) = d\big((0,0,0),\pi\big) = \frac{|2\cdot 0 - 0 - 3\cdot 0 - 3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{3\sqrt{14}}{14}u}$$

Observació: Qualsevol altra manera equivalent i correcta serà també donada per resposta correcta.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pels vectors directors de les rectes.
0,25 punts per justificar el no paral·lelisme.
0,25 punts pel plantejament de la posició relativa.
0,25 punts pels càlculs o passos intermitjos.
0,25 punts per la justificació que les rectes es creuen.

b) 0,25 punts pel plantejament de com calcular la distància.
0,25 punts pels elements del pla a calcular.
0,25 punts pel càlcul del pla paral·lel.
0,25 punts per l'aplicació de la fórmula de la distància d'un punt a un pla.
0,25 punts pel càlcul final.