SÈRIE 3

Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i arrodonir després la suma). Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre criteri i el sentit comú. Copieu la nota de la pregunta i en la casella i.

QÜESTIONS

1. Sigui S la regió del pla de coordenades més grans o igual que zero i tal que els seus punts compleixen:

(i) La mitjana aritmètica de les coordenades és menor o igual que 5.
(ii) El doble de l'abscissa més l'ordenada és més gran o igual que 5.

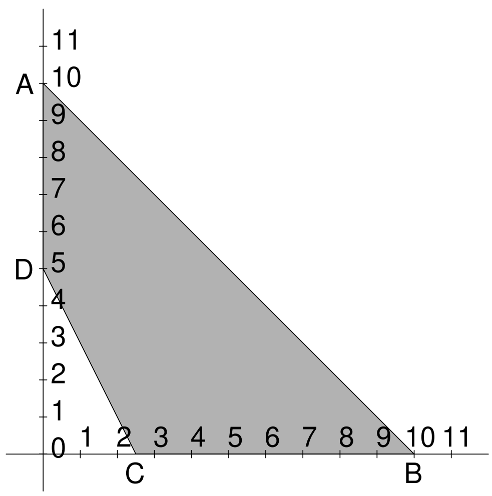
a) Representeu gràficament el conjunt S.
b) Determineu en quins punts de S la funció $f(x, y) = 2x + y$ pren el valor màxim.

Puntuació: cada apartat 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: a) El sistema d'inequacions que representen les restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \\ 2x + y \geq 5 \end{cases}$$

El gràfic de la regió factible és:



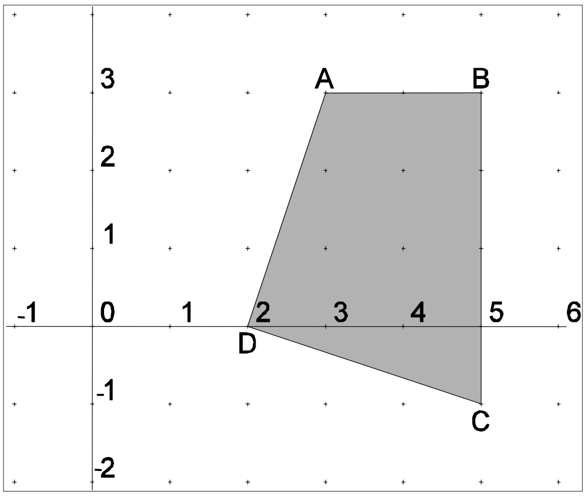
Els punts d'intersecció són $A(0,10)$, $B(10,0)$, $C(5/2,0)$ i $D(0,5)$.

b) Resulta el quadre següent pels valors de la funció $f(x) = 2x + y$:

	$A(0,10)$	$B(10,0)$	$C(5/2,0)$	$D(0,5)$
$f(x,y) = 2x + y$	10	20	5	5

Per tant, $f(x)$ pren el valor màxim que és $\boxed{20}$, en el punt $\boxed{B(10,0)}$.

2. El quadrilàter $ABCD$ és la regió solució d'un sistema d'inequacions lineals. Els costats del quadrilàter també formen part de la regió solució.



a) Trobeu el màxim i el mínim de la funció $f(x,y) = x + 3y$ en aquesta regió.
b) En quins punts de la regió solució de l'apartat anterior assoleix el màxim i en quin el mínim?

Puntuació: cada apartat 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: La funció pren els valors extrems en el contorn. Els punts del contorn són: $A(3,3)$, $B(5,3)$, $C(5,-1)$ i $D(2,0)$. Fem la taula de valors en els vèrtexs:

	$A(3,3)$	$B(5,3)$	$C(5,-1)$	$D(2,0)$
$f(x,y) = x + 3y$	12	14	2	2

Per tant, el $\boxed{\text{màxim}}$ el pren en el punt $\boxed{B(5,3)}$ i val $\boxed{14}$, mentre que el $\boxed{\text{mínim}}$ el pren en tots els $\boxed{\text{punts del segment } CD}$ on $C(5,-1)$ i $D(2,0)$, i val $\boxed{2}$.

3. Sigui $f(x)=\begin{cases} e^{x-1} & si \quad x<1, \\ (x+a)^2 & si \quad x\geq 1. \end{cases}$.

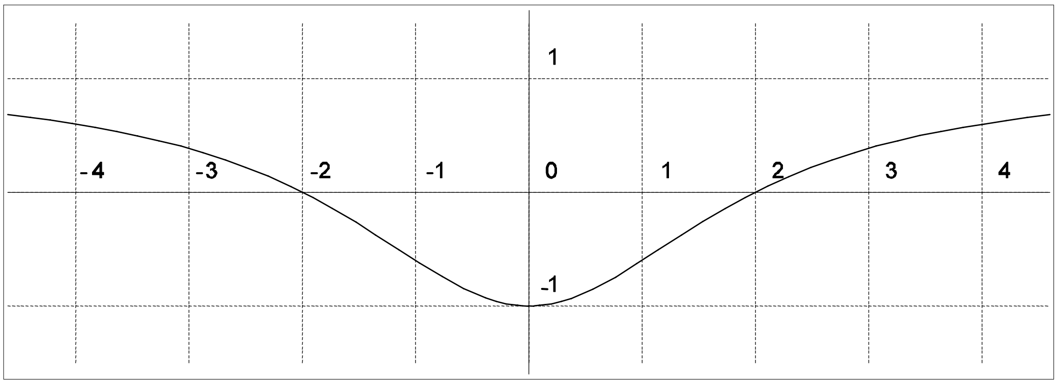
Per a quins valors del paràmetre a la funció és contínua?

Puntuació: Total: 2 punts. Descompteu 0,5 punts si només es dona 1 valor correcte de *a*.

Solució: El possible punt de discontinuïtat és $x=1$, ja que les funcions exponencial i potencial són contínues. El $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$. En canvi, el valor de $f(x)$, així com $\lim_{x\to 1^+} f(x)=(1+a)^2$. Per tant, en el punt $x=1$, la funció serà continua si i només si $(1+a)^2=1$, o sigui, si i només si $\boxed{a=0}$ o $\boxed{a=-2}$.

4. Observeu la gràfica següent i digueu quin valor tenen (aproximadament)

a) $f(0)$ b) x si $f(x)=0$ c) $f'(0)$ d) $f'(-2)$



Puntuació: cada pregunta 0,5 punts. Donar per bo qualsevol valor de $f'(-2)$ que estigui a l'interval [-0.7, -0.2]. Total: 2 punts.

Solució:

a) $\boxed{f(0)=-1}$, ja que per $\boxed{x=0}$ el valor de la funció és -1.

b) Si $f(x)=0$, observem que la funció talla a l'eix $y=0$ en els punts d'abscisses $\boxed{x=\pm 2}$.

c) La derivada en l'origen val $\boxed{f'(0)=0}$, ja que la funció té un mínim relatiu.

d) $\boxed{f'(-2)=-\frac{1}{2}}$, ja que la recta tangent té aproximadament pendent $\boxed{-\frac{1}{2}}$.

PROBLEMES

5. La Joana i la Mercè tenien 20000 € cadascuna per invertir. Cadascuna d'elles fa la mateixa distribució dels seus diners en tres parts P, Q i R i els porta a una entitat financera. Al cap d'un any, a la Joana li han donat un 4% d'interès per la part P, un 5% per la part Q i un 4% per la part R i a la Mercè li han donat un 5% per la part P, un 6% per la part Q i un 4% per la part R. La Joana ha rebut en total 850 € d'interessos, mentre que la Mercè n'ha rebut 950 €. De quants € constava cadascuna de les parts P,Q i R?

Puntuació: plantejament 2 punts; resolució 2 punts. Total: 4 punts.

Solució: Les condicions es tradueixen en el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} P & + & Q & + & R & = & 20000 \\ 0,04P & + & 0,05Q & + & 0,04R & = & 850 \\ 0,05P & + & 0,06Q & + & 0.04R & = & 950 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{ccccccc} P & + & Q & + & R & = & 20000 \\ 4P & + & 5Q & + & 4R & = & 85000 \\ 5P & + & 6Q & + & 4R & = & 95000 \end{array}\right\}$$

que té per solució: $\boxed{P = Q = 5000 \text{ €}, \quad R = 10000 \text{ €}}$.

6. Tres germans tenen edats diferents, però sabem que la suma de les edats dels 3 germans és de 37 anys, i la suma de l'edat del gran més el doble de l'edat del mitjà més el triple de l'edat del petit és de 69 anys.

a) Expresseu les edats dels tres germans en funció de l'edat del germà petit.
b) És possible que el germà petit tingui 5 anys? I 12 anys? Raoneu la resposta.
c) Calculeu les edats dels tres germans.

Puntuació: apartat a) 1,5 punts; apartat b) 1 punt; apartat c) 1,5 punts. Total: 4 punts. Si algú accepta també la solució $x = 9, y = 14, z = 14$, on dos germans tenen la mateixa edat, també es donarà per bona la resposta.

Solució: Designem per x, y, z respectivament les edats dels germans petit, mitjà i gran respectivament. El sistema que tradueix les condicions anteriors és:

$$\left.\begin{array}{c} x + y + z = 37 \\ 3x + 2y + z = 69 \\ x < y < z \end{array}\right\}$$

a) Aïllant y, z en funció de x resulta $\boxed{y = 32 - 2x \text{ i } z = x + 5}$.
b) Si posem $x = 5$ resulten $y = 22$ i $z = 10$, i no es compleix $z > y$. Anàlogament, si posem $x = 12$ resulten $y = 8$ i $z = 17$ i no es compleix $y > x$. Per tant, el germà petit no pot tenir ni 5 ni 12 anys. c) Cal que sigui $y = 32 - 2x > x$ i $z = x + 5 > y = 32 - 2x$. Així, $3x < 32$ i $3x > 27$, i tenim, $9 < x < 10,66..$ Per tant, l'única solució entera possible és $x = 10$. Conseqüentment, les edats són: $\boxed{x = 10, y = 12, z = 15}$.

SÈRIE 1

Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i arrodonir després la suma). Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre criteri i el sentit comú. Copieu la nota de la pregunta i en la casella i.

QÜESTIONS

1. Un venedor té un salari mensual que ve determinat per un sou fix més un cert percentatge sobre el volum de vendes que ha fet durant el mes. Si ven per valor de 2000 €, el seu salari és de 1200 € i, si ven per valor de 2500 €, el salari és de 1300 €. Trobeu el percentatge que guanya sobre el total de vendes i el sou fix.

Puntuació: 2 punts. 1 punt el plantejament i 1 punt la resolució.

Solució: Sigui $a =$ sou fix, $b =$ tant per u sobre vendes, $v =$ volum de vendes. El salari serà $s = a + bv$. Per tant, tenim el sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccc} a & + & 2000b & = & 1200 \\ a & + & 2500b & = & 1300 \end{array}\right\} \text{ d'on resulta } \boxed{b = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%} \text{ i } \boxed{a = 800}.$$

2. En estudiar un sistema lineal depenent del paràmetre k pel mètode de Gauss, hem arribat a la matriu ampliada següent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 8 \\ 0 & k-2 & 5 & | & 12 \\ 0 & 0 & k-1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Discutiu el sistema en funció del paràmetre k.

Puntuació: 2 punts.

Solució: Si $k \neq 1$ i $k \neq 2$ el sistema és de Cramer (amb valor de $z = 0$), i per tant és compatible determinat.
Si $k = 1$, la darrera equació s'elimina i resta un sistema compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat.
Si $k = 2$ les dues darreres equacions encara poden reduir-se i queden

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 5 & | & 12 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 12 \end{pmatrix}$$

resultant el sistema incompatible.

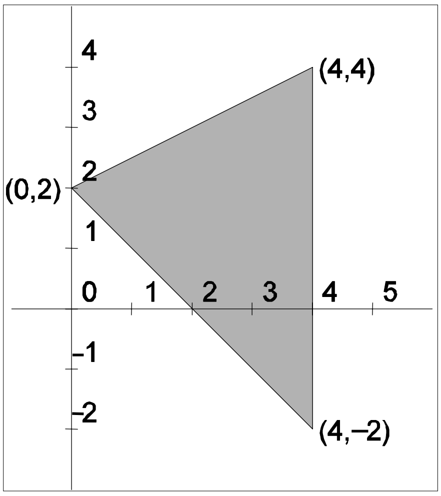
3. a) Representeu gràficament la regió de solucions del sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} x \le 4 \\ x + y \ge 2 \\ x - 2y + 4 \ge 0 \end{cases}$$

b) Calculeu el mínim de la funció $f(x,y) = x - 2y$ en la regió solució del sistema anterior. En quins punts d'aquesta regió s'assoleix aquest mínim?

Puntuació de cada apartat, 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: a) El gràfic de les restriccions és:



.

La funció objectiu en els límits de la regió factible val:

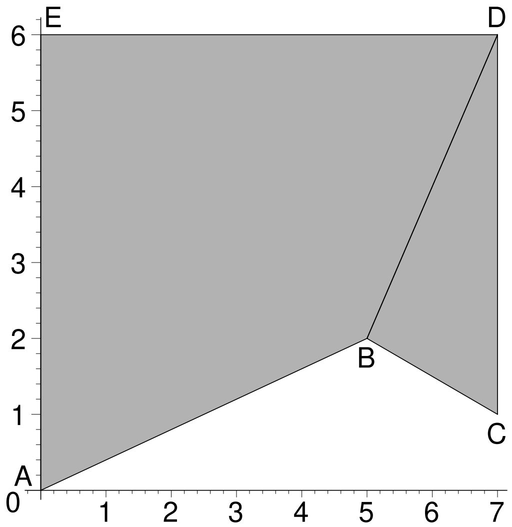
	$(0,2)$	$(4,4)$	$(4,-2)$
$f(x,y) = x - 2y$	-4	-4	8

El mínim de $f(x,y) = x - 2y$ en la regió és $\boxed{-4}$, i s'obté en tots els punts del segment que va del punt $(0,2)$ al punt $(4,4)$.

4. Esbrineu si el polígon de vèrtexs consecutius $A(0,0)$, $B(5,2)$, $C(7,1)$, $D(7,6)$ i $E(0,6)$ és la regió factible d'un problema de programació lineal. Justifiqueu la resposta.

Puntuació: 2 punts. Les respostes sense raonar no puntuen.

Solució: El polígon en qüestió no és convex, i per tant no pot correspondre a una regió factible d'un problema de programació lineal.



PROBLEMES

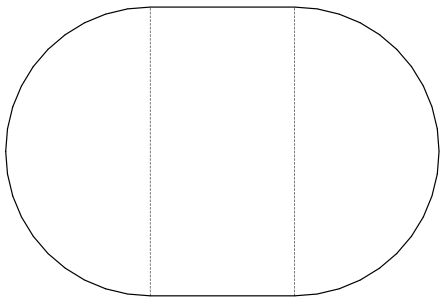
5. Considereu la funció $f(x)=\frac{x^3}{30}-15x^2+2500$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa $x=0$.
b) En quin punt de la corba el pendent de la tangent és mínim? Quin és el valor del pendent mínim?

Puntuació: apartat a) 1,5 punts; apartat b) 2,5 punts. Total: 4 punts.

Solució: a) La funció derivada és $f'(x)=\frac{x^2}{10}-30x$. Per $x=0$ és $f'(0)=0$ i $f(0)=2500$. Per tant, la recta tangent serà $\boxed{y=2500}$.
b) Per obtenir el mínim de la derivada determinem la seva derivada i la igualem a 0. Tenim: $f''(x)=\frac{x}{5}-30$. Per tant, s'anul·la per $\boxed{x=150}$. En aquest punt, la derivada val: $\boxed{f'(150)=\frac{150^2}{10}-30\cdot 150=-2250}$, que és el valor mínim del pendent de $f(x)$.

6. Es vol construir una piscina que tingui per base un rectangle i dos semicercles adjunts tal com s'indica a la figura següent:



Sabent que el perímetre de la piscina ha de ser de 30 m, calculeu les seves dimensions per tal que la superfície sigui màxima.

Puntuació: plantejament 2 punts; resolució 2 punts. Total: 4 punts. En cas d'error en els càlculs que portin a un resultat que no sigui un cercle, es descomptarà 1 punt.

Solució: Anomenem r al radi dels semicercles i x a la distància entre els dos centres dels semicercles. El perímetre és $30=2\pi r+2x$, que ens permet expressar x en termes de r. Tindrem: $x=15-\pi r$. La superfície és:

$$s=\pi r^2+2rx=\pi r^2+2r(15-\pi r)=30r-\pi r^2.$$

Per trobar el valor màxim derivem i igualem a 0 la derivada: $s'(x)=30-2\pi r$. I finalment $30-2\pi r=0$, dóna $\boxed{r=\frac{15}{\pi}\approx 4.77}$m, que determina un valor de $\boxed{x=0}$. Per tant, la piscina ha de ser circular.