

## SÈRIE 1

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i -, de manera a compensar els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta  $i$  en la casella  $i$ , a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

## QÜESTIONS

1. Considereu la funció  $f(x) = \frac{3-2x}{x}$

- a) Trobeu els punts de la gràfica en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta  $3x + 4y + 5 = 0$ .
- b) Calculeu l'equació d'aquestes rectes tangents.

Puntuació: a) 1 punt; b) 1 punt. Total: 2 punts.

**Solució:** a) La funció és  $f(x) = \frac{3-2x}{x} = -2 + \frac{3}{x}$  i la seva derivada  $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$ .

Igualant-la al pendent de la recta obtenim els punts en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta donada:

$-\frac{3}{x^2} = -\frac{3}{4}$ ; per tant  $x^2 = 4$  i  $x = \pm 2$ . Substituint en la funció  $f(x)$  obtenim les

ordenades dels punts:  $P_1 = \left(2, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $P_2 = \left(-2, -\frac{7}{2}\right)$ .

b) Per tant les rectes són:

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}(x-2) \quad \text{o bé} \quad 3x + 4y - 4 = 0,$$

$$y + \frac{7}{2} = -\frac{3}{4}(x+2) \quad \text{o bé} \quad 3x + 4y + 20 = 0.$$

**Nota pel corrector:** No es demana de fer el gràfic.

2. Donades les matrius  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ , esbrineu si existeix una matriu  $C$  que compleixi  $B \cdot C = A$ , i si s'escau, calculeu-la.

Puntuació total: 2 punts.

**Solució:** Escrivim el producte

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per trobar els valors possibles formem el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3z = 2 \\ 2x + 6z = 1 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} y + 3t = 3 \\ 2y + 6t = 2 \end{array} \right\}$$

que és incompatible. Per tant no existeix cap matriu  $C$ .

3. Discutiu en funció del paràmetre  $p$  el sistema d'equacions lineals de matriu ampliada

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & p+5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \end{array} \right).$$

Puntuació total: 2 punts.

**Solució:**

Per  $\underline{p=1}$  el sistema és:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \end{array} \right)$$

que és compatible i indeterminat amb un grau de llibertat.

Per  $\underline{p=-5}$  el sistema és:

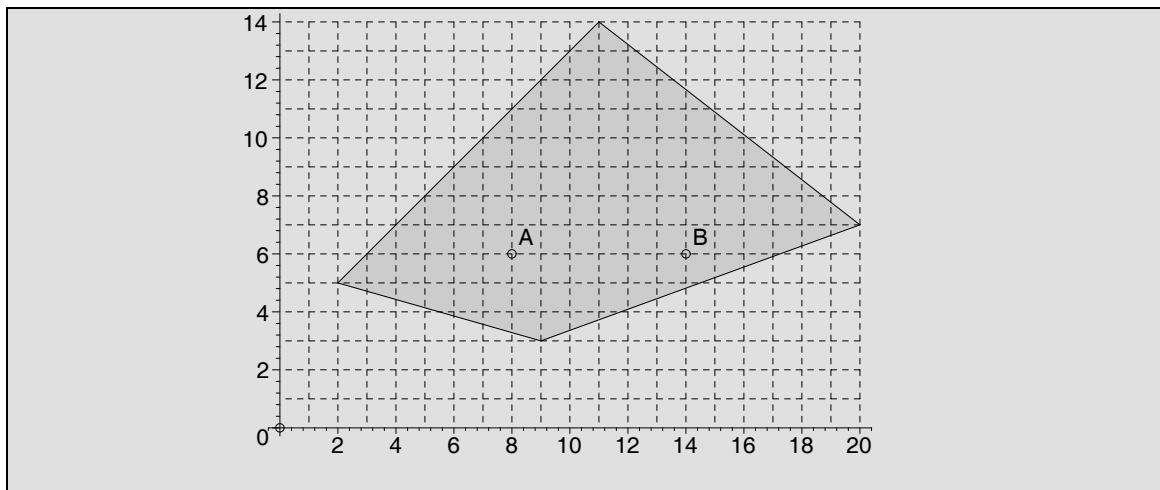
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right)$$

que és incompatible.

Per  $p \neq 1$  i  $p \neq -5$  el sistema és compatible determinat.

**Nota pel corrector:** No es demanen les solucions, si no únicament la discussió.

4. La funció objectiu d'un problema de programació lineal és  $f(x, y) = ax - by + c$ , amb  $a, b, c$  nombres positius. Esbrineu a quin dels dos punts del gràfic  $A$  ó  $B$  la funció objectiu pren un valor major. Raoneu la resposta.



Puntuació total: 2 punts.

**Solució:** La funció objectiu en els punts  $A$  i  $B$  pren els valors:

$$\left. \begin{array}{l} f(A) = 8a - 6b + c \\ f(B) = 14a - 6b + c \end{array} \right\} \text{ i la diferència és: } f(B) - f(A) = 6a > 0.$$

Per tant,  $f(B)$  és més gran que  $f(A)$ .

## PROBLEMES

5. Si el preu de l'entrada d'un cinema és de 6 €, hi van 320 persones. El propietari sap per experiència que per cada augment de 0,25 € en el preu de l'entrada hi van 10 espectadors menys. Trobeu:
- la funció que determina el nombre d'espectadors en funció del preu de l'entrada;
  - la funció que determina els ingressos del cinema en funció del preu de l'entrada;
  - el preu de l'entrada per tal que els ingressos del propietari siguin màxims;
  - el nombre d'espectadors que aniran al cinema quan el preu sigui el que correspon als ingressos màxims i aquests ingressos màxims.

Puntuació cada apartat: 1 punt. Total: 4 punts.

**Solució:**

- a) La funció és una recta que passa pel punt  $(6, 320)$  i té pendent  $-\frac{10}{0,25} = -40$ . Per tant és:

$$e(p) = 320 - 40(p - 6) = 560 - 40p.$$

- b) Els ingressos s'obtenen multiplicant el nombre d'espectadors pel preu:

$$i(p) = e(p) \cdot p = -40p^2 + 560p.$$

- c) La funció que dona els ingressos és una paràbola amb un màxim en el punt en què s'anul·la la derivada  $i'(p) = -80p + 560$ , i que correspon a  $p = 7$  €.

- d) Per aquest preu, el nombre d'espectadors resultant és:  $e(7) = 560 - 40 \cdot 7 = 280$ . Els ingressos màxims seran:  $i(7) = 280 \cdot 7 = 1960$  €.

6. Els alumnes d'un institut disposen de 300 samarretes, 400 llapis i 600 bolígrafs per finançar-se un viatge. Tenen la intenció de vendre'ls en dos tipus de lots: el lot A consta d'1 samarreta, 3 llapis i 2 bolígrafs i el venen per 9€. El lot B consta d'1 samarreta, 2 llapis i 4 bolígrafs i el venen per 11€. Calculeu quants lots de cada tipus han de vendre per treure'n el benefici màxim i aquest benefici màxim.

Puntuació del plantejament: 2 punts; gràfic: 1 punt; solució: 1 punt. Total: 4 punts.

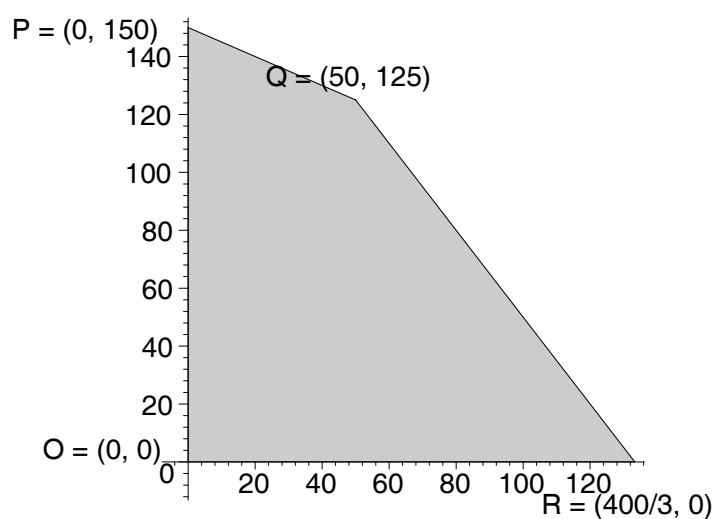
**Solució:** Fem la taula corresponent als dos lots amb els totals de samarretes, llapis i bolígrafs:

|   | Samarretes | Llapis | Bolígrafs | Preu/u |
|---|------------|--------|-----------|--------|
| A | 1          | 3      | 2         | 9      |
| B | 1          | 2      | 4         | 11     |
|   | 300        | 400    | 600       |        |

Les restriccions són:

$$\left. \begin{array}{l} A \geq 0; B \geq 0; \\ A + B \leq 300; \\ 3A + 2B \leq 400; \\ 2A + 4B \leq 600. \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} A \geq 0; B \geq 0; \\ A + B \leq 300; \\ 3A + 2B \leq 400; \\ A + 2B \leq 300. \end{array} \right\}$$

La regió factible correspon al gràfic següent:



Avaluem la funció objectiu en els vèrtexs de la regió factible. Tenim:

|                      | O=(0,0) | P=(0,150) | Q=(50,125) | R=(400/3,0) |
|----------------------|---------|-----------|------------|-------------|
| $f(A, B) = 9A + 11B$ | 0       | 1650      | 1825       | 1200        |

Per tant, el benefici màxim s'obté venent 50 lots de tipus A i 125 lots de tipus B, i és de 1825 €.

**SÈRIE 3**

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera a compensar els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta  $i$  en la casella  $i$ , a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

**QÜESTIONS**

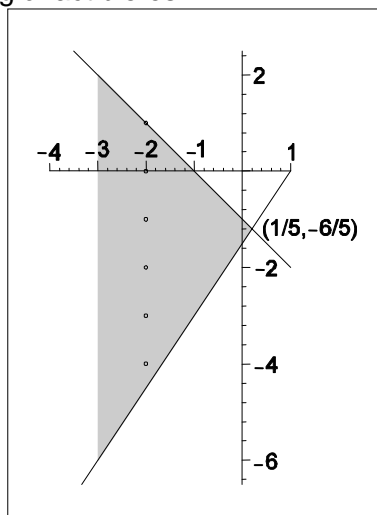
1. a) Representeu la regió solució del sistema d'inequacions lineals següent:

$$\begin{cases} 3x - 2y \leq 3 \\ x + y \leq -1. \end{cases}$$

b) Doneu tres punts d'abscissa  $x = -2$  i ordenada entera que siguin solució del sistema.

Puntuació: a) 1 punt; b) 1 punt. Total 2 punts.

**Solució:** a) El gràfic de la regió factible és:



b) Per  $x = -2$ , s'han de verificar les inequacions:

$$\left. \begin{array}{l} -6 - 2y \leq 3 \\ -2 + y \leq -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y \geq -9 \\ y \leq 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y \geq -\frac{9}{2} \\ y \leq 1 \end{array} \right\}$$

Per tant els punts de la regió amb abscissa igual a -2 són aquells que tinguin  $-\frac{9}{2} \leq y \leq 1$ . En particular, els que tenen coordenades enteres són:

$(-2,-4)$ ,  $(-2,-3)$ ,  $(-2,-2)$ ,  $(-2,-1)$ ,  $(-2,0)$ ,  $(-2,1)$ .

**Nota pels correctors:** No més cal donar tres punts de entre els anteriors.

2. En un problema de programació lineal la regió factible és el conjunt convex format pel triangle de vèrtexs:  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  i  $(1,0)$ . La funció objectiu és paral·lela a la recta  $x + y = 0$ . Trobeu els punts en què la funció objectiu assoleix
- el mínim;
  - el màxim.

Puntuació: a) 1 punt; b) 1 punt. Total 2 punts.

**Solució:** La funció objectiu és de la forma  $f(x, y) = x + y + c$ , on  $c$  és una constant. Tenint en compte que el mínim i el màxim s'obtenen en els límits de la regió tindrem la taula següent:

|                       | $(0,0)$ | $(1,0)$ | $(0,1)$ |
|-----------------------|---------|---------|---------|
| $f(x, y) = x + y + c$ | $c$     | $1 + c$ | $1 + c$ |

- El mínim s'obté en el punt  $(0,0)$ .
- El màxim s'obté en tots els punts del segment d'extremes  $(0,1)$  i  $(1,0)$ .

**Nota pel corrector:** En l'apartat b) es descomptaran 0.5 punts si es dona únicament un punt i 0.25 si es donen dos punts enlloc de tot el segment.

3. Discutiu en funció del paràmetre  $m$  el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + y - z = 2. \end{cases}$$

En el cas que sigui possible doneu també la solució.

Puntuació: discussió 1 punt; solucions 1 punt. Total 2 punts.

**Solució:** Reduïnt per Gauss la matriu del sistema:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & -1-m & 1 \end{array} \right)$$

resulten els casos següents:

$m = -1$  sistema incompatible.

$m \neq -1$  compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat. La solució és:

$$\left. \begin{array}{l} z = -\frac{1}{1+m} \\ y = y \\ x = 1 + \frac{m}{1+m} - y = \frac{1+2m}{1+m} - y \end{array} \right\}$$

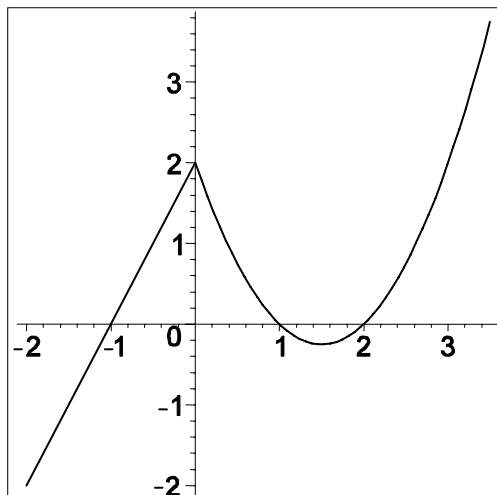
4. Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Dibuixeu la gràfica.
- Estudieu la continuïtat.
- Determineu els extrems relatius.

Puntuació: a) 1 punt; b) 0.5 punt; c) 0.5 punts. Total 2 punts.

**Solució:** a) La gràfica de la funció és la recta de pendent 2 i ordenada a l'origen 2 per  $x \leq 0$ , i per  $x > 0$  la paràbola  $y = x^2$  traslladada de tal manera que talla l'eix  $x$  per  $x = 1$  i  $x = 2$ , que són les arrels i a l'eix  $y$  en el punt  $(0,2)$ . Així tenim





- b) Tenim  $f(0^-) = 2$  i  $f(0^+) = 2$ . Per tant la funció és contínua en tots els punts.
- c) Tenim un màxim relatiu en el punt  $(0,2)$ , perquè en un entorn de  $x=0$  la funció pren valors menors que 2 tret del punt  $(0,2)$ . El mínim relatiu s'obté igualant la derivada a 0, i resulta ser  $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ .

## PROBLEMES

5. El benefici  $B(x)$  (expressat en milers d'euros), que obté una empresa per la venda de  $x$  unitats d'un determinat producte ve donat per la funció:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \quad \text{per a } 50 \leq x \leq 250.$$

- a) Si ha venut 110 unitats, quin benefici ha obtingut?
- b) Quantes unitats pot haver venut si el benefici obtingut ha estat de 3900 milers d'euros?
- c) Quantes unitats ha de vendre per a que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim?
- d) Quina quantitat d'unitats ha de vendre per no tenir pèrdues?

Puntuació: cada apartat 1 punt. Total 4 punts.

**Solució:** a)  $B(110) = 4800$  milers d'euros. (Es pot calcular per Ruffini o bé substituint  $x$  per 100).

b) Si  $B(x) = 3900$  resulta l'equació:  $3900 = -x^2 + 300x - 16100$  o de forma equivalent  $x^2 - 300x + 20000 = 0$ , d'on resulten  $x_1 = 200$  i  $x_2 = 100$ . Per tant pot haver venut 100 o 200 unitats de producte.

c) Per obtenir el benefici màxim hem d'igualar a 0 la derivada de  $B(x)$  que representa una paràbola amb un vèrtex amb màxim. Tenim  $B'(x) = -2x + 300$ . Per tant el màxim s'obté per  $x_M = 150$ , valor pel qual el benefici és  $B(150) = 6400$  milers d'euros.

d) Per no tenir pèrdues cal que  $B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \geq 0$ . Resolent la igualtat obtenim els extrems del segment on  $B(x) \geq 0$ . Aquests són:

$$x = 150 \pm \sqrt{22500 - 16100} = \begin{cases} 230 \\ 70 \end{cases}.$$

Per tant no tindrà pèrdues per  $70 \leq x \leq 230$ .

**Nota pel corrector:** La no especificació correcta de les unitats es penalitzarà amb 0.5 punts.

6. La despesa mensual en salaris d'una empresa de 36 treballadors és de 54900 €. Hi ha tres categories de treballadors que indicarem per A, B i C. El salari mensual d'un treballador de la categoria A és de 900 €, el d'un de la B és de 1500 € i el d'un de la C és de 3000 €. Sense acomiadar ningú, l'empresa vol reduir la despesa salarial en un 5%. Per fer-ho ha rebaixat un 5% el salari dels de la categoria A, un 4% els de la B i un 7% els de la C. Esbrineu quants treballadors hi ha de cada categoria.

Puntuació: plantejament 2 punts; resolució 2 punts. Total 4 punts.

**Solució:** Com hi ha 36 treballadors resulta  $a + b + c = 36$ . Tenint en compte els sous de cada categoria de treballadors resulta  $900a + 1500b + 3000c = 54900$ , que pot simplificar-se dividint per 300 a  $3a + 5b + 10c = 183$ . Determinem ara les reduccions que fa:

$$5\% \text{ de } 54900 = 2745$$

$$5\% \text{ de } 900 = 45$$

$$4\% \text{ de } 1500 = 60$$

$$7\% \text{ de } 3000 = 210.$$

Així tindrem també:  $45a + 60b + 210c = 2745$ . Dividint per 15 queda  $3a + 4b + 14c = 183$ . Obtenim el sistema d'equacions de matriu ampliada següent que reduïm per Gauss:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 3 & 5 & 10 & 183 \\ 3 & 4 & 14 & 183 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & 1 & 11 & 75 \\ 0 & 2 & 7 & 75 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & 1 & 11 & 75 \\ 0 & 0 & -15 & -75 \end{array} \right)$$

Resolent obtenim:

$$\left. \begin{array}{l} c = 5 \\ b = 75 - 55 = 20 \\ a = 36 - 5 - 20 = 11 \end{array} \right\}$$

Així, els nombres de treballadors per categories són: 11 de classe A, 20 de classe B i 5 de classe C.