SÈRIE 2

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera a compensar els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i,* a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1. a) Discutiu el sistema següent segons els valors del paràmetre a:

$$\left.\begin{aligned} x+(a+1)y &= 1 \\ ax+2y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

b) Resoleu-lo per al valor de a que el fa indeterminat.

Puntuació: Apartat a) 1 punt si troben els tres casos; 0.5 punts si els classifiquen tots tres be; Apartat b) 0.5 punts. Total 2 punts.

Solució: Discutim per Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & a+1 & | & 1 \\ a & 2 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a+1 & | & 1 \\ 0 & 2-a^2-a & | & -2-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a+1 & | & 1 \\ 0 & (a-1)(a+2) & | & a+2 \end{pmatrix}$$

Si $a=1$ el sistema és incompatible.
Si $a=-2$ la darrera línia es fa tota zero i desapareix. El sistema esdevé compatible indeterminat. La solució és: $y=y$; $x=1+y$.
Si $a \neq 1$ i $a \neq -2$ el sistema és Cramer compatible i determinat.

En aquest cas, la solució (que no es demana) és:

$$y = \frac{a+2}{(a-1)(a+2)} = \frac{1}{a-1}$$

$$x = 1-\frac{a+1}{a-1} = \frac{a-1-a-1}{a-1} = \frac{-2}{a-1}.$$

2. Considereu la funció definida a trossos següent:

$$f(x)=\begin{cases}-4x+a & \text{si} \quad x\le -2\\ x^2-5 & \text{si} \quad -2<x<1\\ bx+3 & \text{si} \quad 1\le x\end{cases}$$

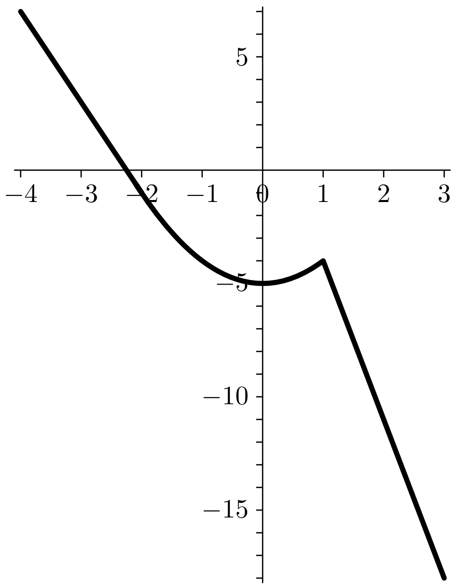
a) Calculeu els valors de a i de b per tal que $f(x)$ sigui contínua per a tot x.
b) Feu un gràfic de la funció obtinguda en l'apartat anterior.

Puntuació: Cada apartat 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: a) Perquè sigui contínua els límits per l'esquerra i per la dreta en els punts $x=-2$ i $x=1$ han de ser iguals. Per tant:

$$\left.\begin{aligned}8+a &= -1\\ -4 &= b+3\end{aligned}\right\} \to \left.\boxed{\begin{aligned}a&=-9\\ b&=-7\end{aligned}}\right\}$$ i la funció serà: $$f(x)=\begin{cases}-4x-9 & \text{si} \quad x\le -2\\ x^2-5 & \text{si} \quad -2<x<1\\ -7x+3 & \text{si} \quad 1\le x\end{cases}$$

b) Per $x\le -2$ és una recta de pendent -4 i per $x=-2$ té el valor $f(x)=-1$. Per $-2\le x\le 1$ és una paràbola de vèrtex a $x=0$ i per $x\ge 1$ és una recta de pendent -7 que per $x=1$ te el valor $f(x)=-4$. A més, per construcció és continua. Per tant la gràfica és:



3. Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y & \leq & 8 \\ x+y & \geq & 5 \\ x-5y & \leq & 0 \end{array}\right\}$$

a) Resoleu-lo gràficament.
b) Trobeu-ne totes les solucions enteres.

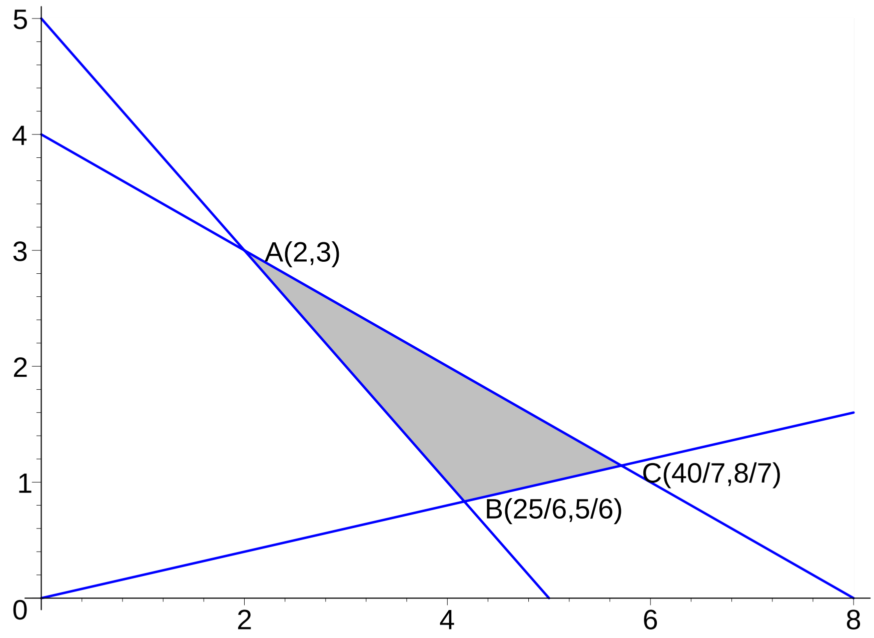
Puntuació: Apartat 1: 0,25 punts per cada vèrtex i 0,25 punts pel gràfic; total 1 punt. Apartat 2: 0,2 punts per cada solució entera correcte; total 1 punt. Total 2 punts.

Solució: Els punts d'intersecció dels costats són:

$$A:\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 8 \\ x+y & = & 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y=3 \\ x=2 \end{array}\right\} \quad B:\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 5 \\ x-5y & = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y=\dfrac{5}{6} \\ x=\dfrac{25}{6} \end{array}\right\}$$

$$C:\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 8 \\ x-5y & = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y=\dfrac{8}{7} \\ x=\dfrac{40}{7} \end{array}\right\}.$$

El gràfic de la regió factible és:



b) Per determinar les solucions enteres fixem el mínim valor enter de y factible que és $y=1$ i posem les condicions sobre les x. Resulten:

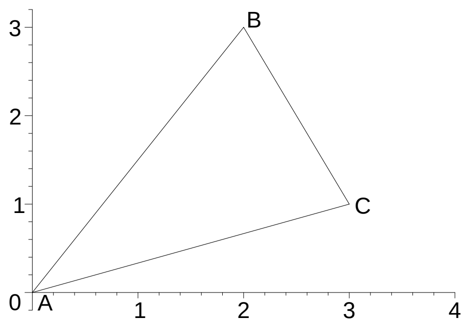
$$y=1 \quad \left.\begin{array}{l} x\le 6 \\ x\ge 4 \\ x\le 5 \end{array}\right\} \to \boxed{(4,1)} \text{ i } \boxed{(5,1)}; \qquad y=2 \quad \left.\begin{array}{l} x\le 4 \\ x\ge 3 \\ x\le 10 \end{array}\right\} \to \boxed{(3,2)} \text{ i } \boxed{(4,2)};$$

$$y=3 \quad \left.\begin{array}{l} x\le 2 \\ x\ge 2 \\ x\le 15 \end{array}\right\} \to \boxed{(2,3)}.$$ Aquestes són les úniques solucions enteres.

4. Trobeu un sistema d'inequacions que tingui com a conjunt de solucions l'interior i els costats del triangle del pla de vèrtexs (0,0), (2,3) i (3,1).

Puntuació: 1 punt per trobar correctament les equacions dels costats; 1 punt per trobar les inequacions. Total: 2 punts.

Solució: Posem $A(0,0)$, $B(2,3)$ i $C(3,1)$. El triangle és:



Les condicions seran

Costat	AB;	$y\le \frac{3}{2}x$;	$2y-3x\le 0.$
Costat	BC;	$y-1\le -2(x-3)$;	$2x+y\le 7.$
Costat	CA;	$y\ge \frac{1}{3}x$	$3y-x\ge 0.$

PROBLEMES

5. Els beneficis mensuals d'un artesà expressats en euros, quan fabrica i ven x objectes, s'ajusten a la funció $B(x) = -0.5x^2 + 50x - 800$, en què $20 \le x \le 60$.

a) Trobeu el benefici que obté en fabricar i vendre 20 objectes i en fabricar i vendre 60 objectes.

b) Trobeu el nombre d'objectes que ha de fabricar i vendre per a obtenir el benefici màxim, així com aquest benefici màxim.

c) Feu un esbós del gràfic de la funció $B(x)$.

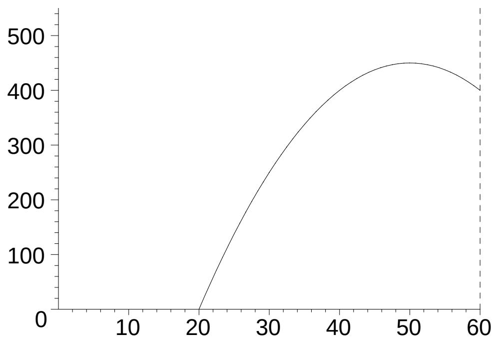
d) El benefici mitjà per x objectes és $M(x) = \dfrac{B(x)}{x}$. Digueu quants objectes ha de fabricar i vendre perquè el benefici mitjà sigui màxim, i quin és aquest benefici.

Puntuació: 1 punt per cada apartat. Total: 4 punts.

Solució: a) $\boxed{B(20) = 0\,€}$. $\boxed{B(60) = 400\,€}$.

b) Trobem els extrems relatius igualant la derivada a 0. $B'(x) = -x + 50$. Per tant s'obté per $\boxed{x = 50}$ i el seu valor és $\boxed{B(50) = 450\,€}$, que òbviament és el màxim absolut a l'interval $20 \le x \le 60$.

c) El gràfic és:



d) El benefici mitjà ve donat per $M(x) = \dfrac{B(x)}{x} = -0.5x + 50 - \dfrac{800}{x}$. Per tant la derivada és: $M'(x) = -0.5 + \dfrac{800}{x^2}$. Igualant a zero resulta $x = \pm 40$, i l'única solució dins de l'interval és $\boxed{x = 40}$ i té per valor $M(40) = -20 + 50 - 20 = 10$. Per tant ha de vendre 40 objectes i obtindrà un benefici mitjà de 10 €.

6. Un taller de confecció fa jaquetes i pantalons per a criatures. Per fer una jaqueta necessiten 1m de roba i dos botons, i per a fer uns pantalons calen 2m de roba, 1 botó i 1 cremallera. El taller disposa de 500 m de roba, 400 botons i 225 cremalleres. El benefici que obté per la venda d'una jaqueta és de 20 € i per la d'uns pantalons és de 30 €. Suposant que es ven tot el que es fabrica:

a) Calculeu el nombre de jaquetes i de pantalons que s'han de fer per tal d'obtenir un benefici màxim. Determineu també aquest benefici màxim.

b) Si el material sobrant es ven a 1 € el metre de roba, a 0,20 € cada cremallera i a 0,01 € cada botó, calculeu quant es pot obtenir de la venda del que ha sobrat.

Puntuació: a) 1 punt per les inequacions; 1 punt per la gràfica i els vèrtexs; 1 punt per trobar el màxim; b) 1 punt. Total: 4 punts.

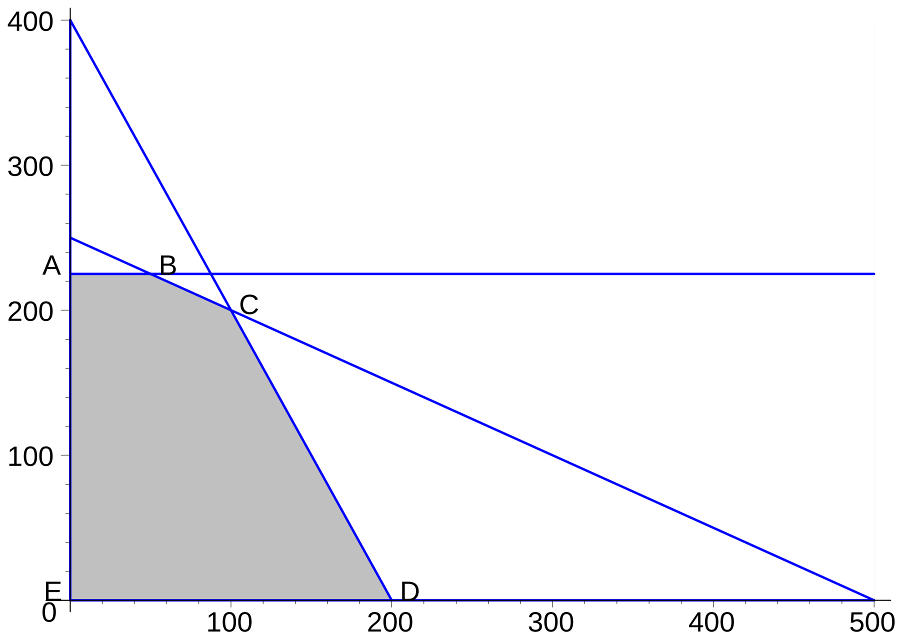
Solució: a) Anomenem x i y a les quantitats de jaquetes i pantalons que fa. Les condicions es poden resumir en la taula següent:

		roba	botons	cremalleres
jaquetes	x	1	2	0
pantalons	y	2	1	1
Total		500	400	225

Per tant les condicions són:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y & \le & 500 \\ 2x+y & \le & 400 \\ y & \le & 225 \\ x\ge 0; & & y\ge 0 \end{array}\right\}$$

i la gràfica corresponent és:



Els vèrtexs de la regió factible són:

$$A:\left.\begin{cases} y = 225 \\ x = 0 \end{cases}\right\} \to A(0,225); \qquad B:\left.\begin{cases} y = 225 \\ x+2y = 500 \end{cases}\right\} \to B(50,225);$$

$$C:\left.\begin{cases} x+2y = 500 \\ 2x+y = 400 \end{cases}\right\} \to C(100,200); \qquad D:\left.\begin{cases} y = 0 \\ 2x+y = 400 \end{cases}\right\} \to D(200,0).$$

La funció benefici a maximitzar és: $f(x,y)=20x+30y$. Tenim:

	A(0,225)	B(50,225)	C(100,200)	D(200,0)	E(0,0)
$f(x,y)=20x+30y$	6750	7750	8000	4000	0
			màxim		

Per tant el $\boxed{\text{benefici màxim és 8000 € i s'obté fent 100 jaquetes i 200 pantalons}}$.

b) Si es fabriquen les quantitats anteriors, el sobrant és

roba	$500-1\cdot100-2\cdot200=0$
botons	$400-2\cdot100-1\cdot200=0$
cremalleres	$225-0\cdot100-1\cdot200=25$

El $\boxed{\text{benefici marginal és doncs de } 25\cdot 0,20€ = 5€ .}$

SÈRIE 1

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera a compensar els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0.25 o 0.5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0.75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i,* a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1. Trobeu el màxim de la funció $f(x,y)=5x+y-13$ en la regió tancada definida pel triangle de vèrtexs A=(2,4), B=(6,8) i C=(7,3), així com el punt o els punts on s'obté aquest màxim.

Puntuació: Càlcul dels valors de la funció en els tres vèrtex: 1 punt; resposta correcte de que el màxim és 25 i s'obté sobre tot el costat BC: 1 punt. Total: 2 punts.

Solució: El màxim s'obté sobre la frontera de la regió factible tancada. Tenim:

$$f(A)=f(2,4)=1\,,\quad f(B)=f(6,8)=25\,,\quad f(C)=f(7,3)=25$$

Per tant, el màxim val 25 i s'obté sobre en tot el segment BC.

2. Una companyia aèria de baix cost realitza vols des de Girona a 3 ciutats A, B i C. Calculeu el preu dels bitllets a cada ciutat amb la informació següent: Si ven 10 bitllets a la ciutat A, 15 a la B i cap a la C ingressa 925 €; si ven 12 bitllets per A, 8 per B i cap per C ingressa 760 €; si ven 6 bitllets per A, 5 per B i 8 per C ingressa 855 €.

Puntuació: 1 punt pel plantejament; 1 per la solució. Total: 2 punts.

Solució: Plantegem el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 10A+15B & = & 925 \\ 12A+8B & = & 760 \\ 6A+5B+8C & = & 855 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcl} 2A+3B & = & 185 \\ 3A+8B & = & 190 \\ 6A+5B+8C & = & 855 \end{array}\right\}$$

De les dues primeres obtenim $\boxed{A=40}$ i $\boxed{B=35}$. Substituint en la tercera resulta $\boxed{C=55}$.

3. En un taller fabriquen dos tipus de bosses. Per fer una bossa del primer model es necessiten 0.9 m^2 de cuir i 8 hores de feina. El segon model necessita 1.2 m^2 de cuir i 4 hores de feina. Per fer aquests dos tipus de bosses el taller disposa de 60 m^2 de cuir i pot dedicar-hi un màxim de 400 hores de feina.

a) Expresseu mitjançant un sistema d'inequacions les restriccions a les que està sotmesa la producció d'aquests dos models de bosses.

b) Representeu la regió solució d'aquest sistema i trobeu-ne els vèrtexs.

Puntuació: Cada apartat 1 punt. Total 2 punts.

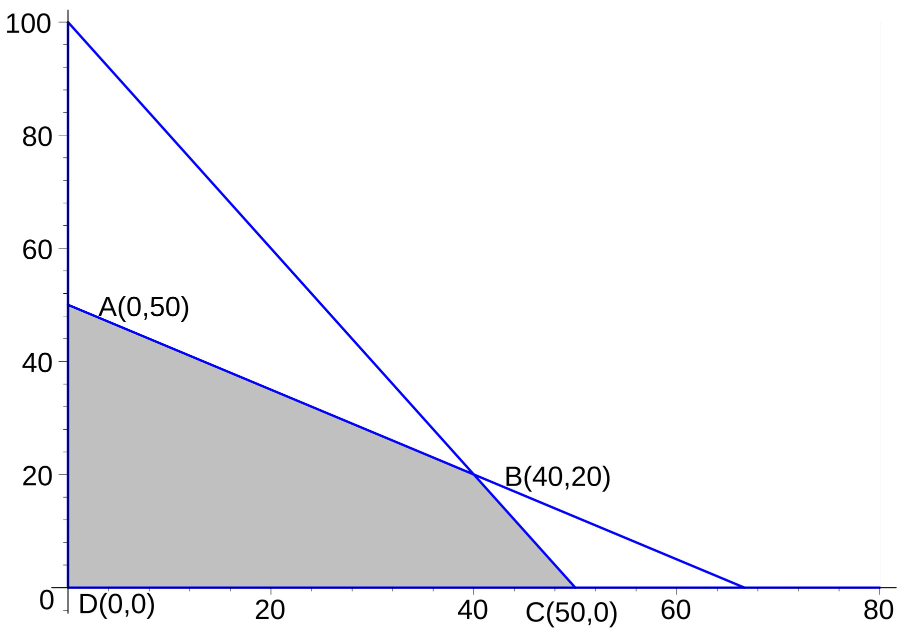
Solució: Anomenant respectivament x i y als nombres de bosses dels models 1 i 2, les condicions poden resumir-se en la taula següent:

Nombre bosses	Cuir (m^2)	Feina (h)
x	0.9	8
y	1.2	4
Màxim	60	400

a) El sistema d'inequacions corresponent és:

$$\left.\begin{array}{lcl} 0.9x+1.2y & \le & 60 \\ 8x+4y & \le & 400 \\ x & \ge & 0 \\ y & \ge & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{lcl} 3x+4y & \le & 200 \\ 2x+y & \le & 100 \\ x & \ge & 0 \\ y & \ge & 0 \end{array}\right\}$$

b) Representem gràficament la regió factible:



El punt A s'obté de $x=0$ i $3x+4y=200$ i és A(0,50).

El punt B s'obté com a solució del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x+4y & = & 200 \\ 2x+y & = & 100 \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} 3 & 4 & | & 200 \\ 2 & 1 & | & 100 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 100 \\ 0 & \frac{5}{2} & | & 50 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} y=20 \\ x=40 \end{array}\right\}$$

El punt C s'obté de $y=0$ i $2x+y=100$ i és C(50,0). Finalment tenim D(0,0).

4. La funció $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ té un extrem relatiu en el punt (1,4) i passa pel punt (3,0). Trobeu a,b,c.

Puntuació: Plantejament 1 punt; solució 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) La funció derivada és $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. L'extrem relatiu en el punt (1,4) dóna dues condicions: passa pel punt i per tant $a+b+c=4$, i la derivada val 0 i per tant $3a+2b+c=0$. Com que també passa pel punt (3,0) resulta $27a+9b+3c=0$, i simplificant-la $9a+3b+c=0$. Escrivim la matriu ampliada del sistema i reduïm per Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 3 & 2 & 1 & | & 0 \\ 9 & 3 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -1 & -2 & | & -12 \\ 0 & -3 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 12 \\ 0 & 2 & 4 & | & 36 \end{pmatrix}$$

d'on obtenim

$$\left\{\begin{array}{lclcl} c & = & 9 & & \\ b & = & 12-18 & = & -6 \\ a & = & 4-9+6 & = & 1. \end{array}\right.$$

La funció és doncs, $f(x)=x^3-6x^2+9x$.

Nota: La funció derivada és $f'(x)=3x^2-12x+9$ i la derivada segona és $f''(x)=6x-12$. Per tant $f(1)=4$, $f'(1)=0$ i $f''(1)=-6$. Per tant, la funció té un màxim en el punt (1,4).

PROBLEMES

5. Considereu la funció real de variable real

$$f(x) = \frac{2x+m}{x}$$

on m és un paràmetre real.

a) Calculeu el valor de m per tal que la tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=-3$ sigui paral·lela a la recta $x-3y+1=0$. Calculeu també l'equació d'aquesta tangent.

Ara fixeu el valor de $m=1$.

b) Doneu el domini de la funció i els intervals on és creixent o decreixent.
c) Determineu les asímptotes.
d) Feu un esbós de la gràfica.

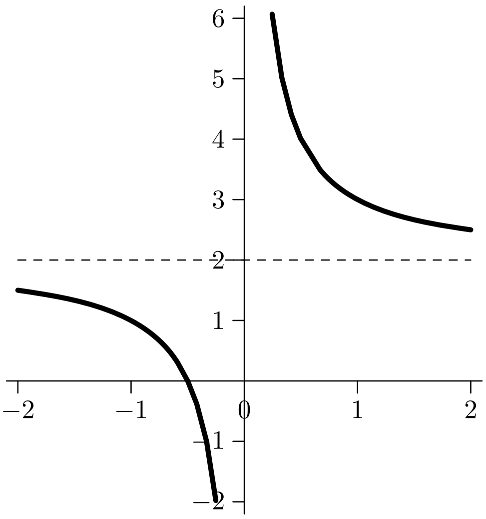
Puntuació: Cada apartat 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) Calculem la funció derivada: $f(x) = 2+\frac{m}{x}$, $f'(x) = -\frac{m}{x^2}$, i el seu valor per $x=-3$ que ha de ser igual al pendent de la recta: $f'(-3) = -\frac{m}{9} = \frac{1}{3}$. D'on resulta $\boxed{m=-3}$. La funció serà: $f(x) = 2-\frac{3}{x}$, i el valor de la funció per $x=-3$ és $f(-3) = 2-\frac{3}{-3} = 3$. Per tant, la recta tangent és: $y = 3+\frac{1}{3}(x+3)$, o també: $\boxed{x-3y+12=0}$.

b) Ara la funció és $\boxed{f(x) = 2+\frac{1}{x}}$. El domini és tot els reals excepte el zero, i la derivada és $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ que és negativa en tot el domini. Per tant la funció és decreixent en tot el domini.

c) Té una asímptota vertical $\boxed{x=0}$ on s'anul·la el denominador. El límit de $f(x)$ per $x \to \infty$ és 2. Per tant té una asímptota horitzontal $\boxed{y=2}$.

d) Tenint en compte que per $\boxed{x>0}$ la funció $f(x)$ és positiva, el gràfic de la funció és per tant:



6. Tres entitats financeres A B y C ofereixen respectivament, per a dipòsits superiors a 2000 €, un interès anual del 2%, 3% i k % (que no coneixem). La Joana, en Manel i el Dani decideixen invertir els seus estalvis en aquestes entitats durant un any. Sabem que si tots ho fessin a l'entitat A obtindrien en total uns beneficis de 164 €; però si la Joana optés per A, en Manel per C i en Dani per B n'obtindrien 192 €; finalment, si la Joana i en Manel es decidissin per B i el Dani per C n'obtindrien 218 €.

a) Escriviu un sistema d'equacions que descrigui la situació.
b) Sense resoldre el sistema, determineu la quantitat total de diners invertida entre les tres persones.
c) Trobeu, si existeix, un valor de k per al qual hi hagi infinites solucions. Resoleu el sistema per aquest valor de k, i doneu-ne tres solucions diferents.

Puntuació: Apartat a) 1 punt; apartat b) 0.5 punts; apartat c) 1 punt per determinar k=3 i k=2; 1 punt per donar la solució general per k=2; 0.5 per donar tres solucions diferents. Total 4 punts.

Solució: a) Sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{rcl} 0.02(x+y+z) & = & 164 \\ 0.02x+\dfrac{ky}{100}+0.03z & = & 192 \\ 0.03(x+y)+\dfrac{kz}{100} & = & 218 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 8200 \\ 2x+ky+3z & = & 19200 \\ 3x+3y+kz & = & 21800 \end{array}\right\}$$

b) La primera equació dóna directament que la quantitat total invertida pels tres és 8200 €.

c) Resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 8200 \\ 2 & k & 3 & | & 19200 \\ 3 & 3 & k & | & 21800 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 8200 \\ 0 & k-2 & 1 & | & 2800 \\ 0 & 0 & k-3 & | & -2800 \end{pmatrix}$$

Si $k=3$ el sistema és incompatible. Si $k=2$ resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 8200 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2800 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2800 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 8200 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2800 \end{pmatrix}$$

que correspon a la solució general:

$$\left.\begin{aligned} z &= 2800 \\ y &= y \\ x &= 5400-y \end{aligned}\right\}$$

Podem donar fàcilment tres solucions diferents, per exemple:

x	2400	2900	3400
y	3000	2500	2000
z	2800	2800	2800

Nota pels correctors: Les tres solucions han de tenir $x \geq 2000$ i $y \geq 2000$ per verificar les condicions de l'enunciat. Altrament els interessos no corresponen. Penalitzeu molt lleugerament el lapsus.