SÈRIE 4

- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul segons la importància de l'error i el vostre criteri. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i,* a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.
- La nota final de l'exercici serà el resultat d'arrodonir la suma final al mig punt més pròxim i, si resulta ser equidistant de dos, s'apujarà 0.25 punts.

QÜESTIONS

1. Considereu la funció real de variable real:

$$f(x)=\frac{x^2+5x}{x-4}.$$

a) Determineu els intervals de creixement i decreixement. [1.5 punts]
b) Trobeu-ne els extrems relatius. [0.5 punts]

Solució: a) i b) El domini és tots els reals excepte el 4. La derivada és:

$$f'(x)=\frac{(2x+5)(x-4)-x^2-5x}{(x-4)^2}=\frac{2x^2-3x-20-x^2-5x}{(x-4)^2}=\frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2}=\boxed{\frac{(x-10)(x+2)}{(x-4)^2}}.$$

Per tant, els intervals de creixement i decreixement i els extrems són:

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<10;\quad x\neq 4$	$x=10$	$x>10$
	$f'>0$	$f'=0$	$f'<0$	$f'=0$	$f'>0$
f	creix	màx	decreix	min	creix
f		1		25	

Per tant els extrems són $\boxed{(-2,1) \text{ que és un màxim i } (10,25) \text{ que és un mínim}}$.

2. Una persona va invertir 6000 € comprant accions de dues empreses, A i B. Al cap d'un any, el valor de les accions de l'empresa A ha pujat un 5 % i, en canvi, el valor de les accions de l'empresa B ha baixat un 10 %. Tot i així, si vengués ara les accions guanyaria 150 €. Determineu quants diners va invertir en accions de cada empresa.
[2 punts]

Puntuació: Plantejament 1 punt; solució 1 punt. Total 2 punts.

Solució: Anomenant x, y als imports invertits en accions de les empreses A i B tenim:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 6000 \\ 0.05x-0.1y & = & 150 \end{array}\right\}$$

Resolent pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & & 6000 \\ 0.05 & -0.1 & & 150 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & & 6000 \\ 0 & -0.15 & & -150 \end{array}\right)$$, d'on resulta $y=1000; \quad x=5000$.

Evidentment si es resol per un altre mètode puntuarà igual.

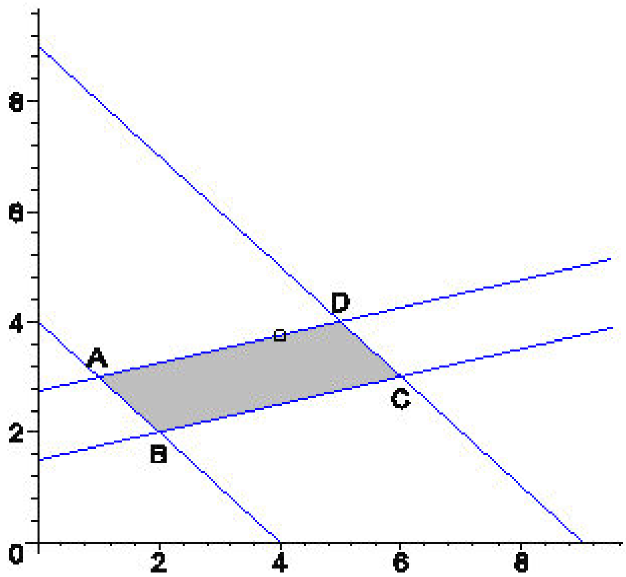
3. Considereu la regió de solucions determinada pel sistema d'inequacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-4y & \geq & -11 \\ x+y & \geq & 4 \\ x-4y & \leq & -6 \\ x+y & \leq & 9 \end{array}\right\}.$$

a) Dibuixeu la regió de solucions del sistema. [1 punt]

b) Una funció objectiu $f(x,y)=ax+by+c$ pren el valor mínim en aquesta regió en el punt (4,15/4). Digueu si també pren el valor mínim en altres punts de la regió i, si és així, determineu-los. [1 punt]

Solució: a) Representem les quatre rectes i la regió de solucions:



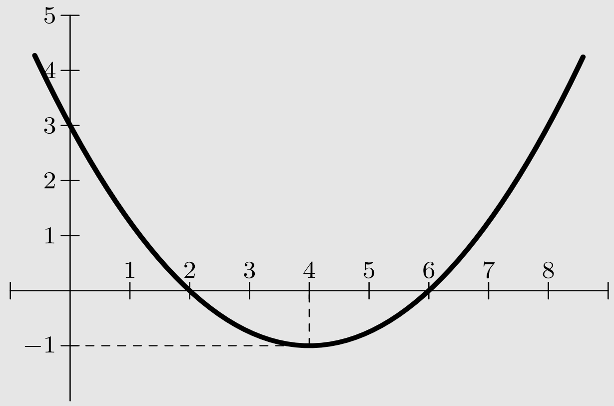
Calculem els quatre vèrtexs:

$$A:\left\{\begin{array}{rcr} x-4y & = & -11 \\ x+y & = & 4 \end{array}\right\} \to A(1,3)\,,\quad B:\left\{\begin{array}{rcr} x+y & = & 4 \\ x-4y & = & -6 \end{array}\right\} \to B(2,2)\,,$$

$$C:\left\{\begin{array}{rcr} x-4y & = & -6 \\ x+y & = & 9 \end{array}\right\} \to C(6,3)\,,\quad D:\left\{\begin{array}{rcr} x+y & = & 9 \\ x-4y & = & -11 \end{array}\right\} \to D(5,4)\,.$$

b) El punt (4,15/4) no és cap vèrtex, però està en el segment AD que té per equació $x-4y=-11$ amb $2 \le x \le 6$, com podem comprovar. Com el punt és un extrem de la funció objectiu, aquesta prendrà el mateix valor en tot el segment AD.

4. La gràfica adjunta representa una funció polinòmica de segon grau (paràbola).



a) Trobeu el vèrtex de la paràbola i les interseccions amb el eixos. [0.5 punts]
b) Determineu l'equació de la paràbola. [1.5 punts]

Solució: a) Observant el gràfic el $\boxed{\text{vèrtex és } (4,-1)}$, la intersecció amb l'eix y és $\boxed{(0,3)}$ i amb l'eix x són els punts $\boxed{(2,0)}$ i $\boxed{(6,0)}$.

b) Per tant l' equació de la paràbola és de la forma $y = a(x-2)(x-6) = a(x^2-8x+12)$.

Imposant que passi pel punt (0,3) tenim $3 = a\cdot(-2)(-6)$, d'on resulta $a=\dfrac{1}{4}$, i la paràbola té per equació $\boxed{y=\dfrac{1}{4}(x-2)(x-6)=\dfrac{1}{4}x^2-2x+3}$.

PROBLEMES

5. Considereu el sistema d'equacions lineals següent

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+3z &=& k \\ 2y+z &=& 0 \\ x+3y+k^2z &=& 2 \end{array}\right\}.$$

a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre k. [2 punts]

b) Determineu la solució del sistema pels valors de k que fa que el sistema sigui indeterminat. [1 punt]

c) Doneu la solució per a $k=1$. [1 punt]

Puntuació: Apartat a) 2 punts si es distingeixen correctament els tres casos i el seus caràcters; apartat b) 1 punt; apartat c) 1 punt. Total 4 punts.

Solució: a) Resolent pel mètode de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & k \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & k^2 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & k \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & k^2-3 & | & 2-k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & k \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & k^2-4 & | & 2-k \end{pmatrix}$$

Per a $k \notin \{-2,2\}$ el sistema és compatible determinat.

Per $k=-2$ la darrera equació fa el sistema incompatible.

Per $k=2$ la darrera equació es cancel·la i el sistema esdevé compatible indeterminat.

b) Per $k=2$ la solució és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \text{ d'on resulta: } \left.\begin{array}{rcl} z &=& z \\ y &=& -\dfrac{z}{2} \\ x &=& 2-3z+\dfrac{z}{2} = 2-\dfrac{5z}{2} \end{array}\right\}.$$

c) Per $k=1$ el sistema és compatible determinat. Tenim,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 1 \end{pmatrix} \text{ d'on resulta } \left.\begin{array}{rcl} z &=& -\dfrac{1}{3} \\ y &=& \dfrac{1}{6} \\ x &=& 1+1-\dfrac{1}{6} = \dfrac{11}{6} \end{array}\right\}$$

6. Una empresa de mobles fabrica dos models d'armaris, A i B. Per al model A calen 5 h 30 min de feina i 2 m de fusta. Per al model B calen 4 hores de feina i 3 m de fusta. L'empresa no pot fabricar més de 430 armaris per setmana, disposa de 2800 hores de feina i de 1200 m de fusta. Els armaris de tipus A i B proporcionen respectivament, 250 € i 310 € de benefici cadascun. Determineu el nombre d'armaris de cada tipus que s'han de fabricar per obtenir el benefici màxim. [4 punts]

Puntuació:. Plantejament 1 punt; Gràfic i vèrtexs 2 punts; Màxim 1 punt; Total 4 punts.

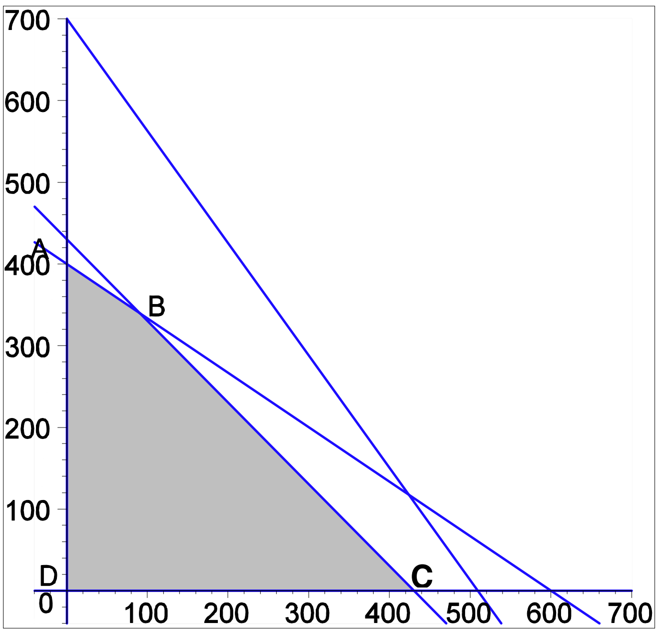
Solució: Anomenem x i y als nombres d'armaris de tipus A i B que es fabriquen. Les condicions estan resumides en la taula següent:

		Feina (hores)	Fusta (m^2)
Model A	x	5.5	2
Model B	y	4	3
màxim	430	2800	1200

Per tant les condicions són:

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y & \leq & 430 \\ 5.5x+4y & \leq & 2800 \\ 2x+3y & \leq & 1200 \\ x\geq 0; & & y\geq 0 \end{array}\right\} .$$

La gràfica corresponent és:



Els vèrtexs de la regió factible són:

$$A:\left.\begin{cases} x = 0 \\ 2x+3y = 1200 \end{cases}\right\} \rightarrow A(0,400) \quad B:\left.\begin{cases} 2x+3y = 1200 \\ x+y = 430 \end{cases}\right\} \rightarrow B(90,340)$$

$$C:\left.\begin{cases} x+y = 430 \\ y = 0 \end{cases}\right\} \rightarrow C(430,0), \qquad D(0,0)$$

La funció benefici a maximitzar és: $f(x,y) = 250x + 310y$. Tenim:

	A(0,400)	B(90,340)	C(430,0)	D(0,0)
$f(x,y) = 250x + 310y$	124000	127900	107500	0
		màxim		

Per tant el benefici màxim és 127900 € i s'obté fent 90 armaris de tipus A i 340 armaris de tipus B.