SÈRIE 2

RECORDEU:
- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.
- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.

1. Quan sumem 2 unitats al denominador d'una fracció, la nova fracció val 1 unitat. En canvi, si a la fracció original sumem 3 unitats al seu numerador, la fracció val 2 unitats. Determineu la fracció original.

Anomenarem la fracció cercada $\frac{x}{y}$. Les condicions del problema signifiquen

$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{y+2}=1\\ \frac{x+3}{y}=2\end{array}\right\}$ que, una vegada resolt el sistema, ens dóna x = 7, y = 5. Per tant, la fracció que ens demanaven és $\frac{7}{5}$.

2. Considerem la funció $f(x)=x^3-ax^2+9x+b$.
   a. Determineu a i b sabent que la gràfica de f passa pel punt P(2,2) i té un extrem a x = 1.
   b. En el cas a = 6, b = 0, determineu els possibles màxims i mínims de f, i classifiqueu-los.

a.
Com que passa per P(2,2), f(2) = 2, que es tradueix en $2=8-4a+18+b \rightarrow 4a-b=24$. D'altra banda, $f'(x)=3x^2-2ax+9$. Com que f té un extrem en el punt x=1, f'(1) = 0, que es tradueix en $0=3-2a+9 \rightarrow a=6$ i, per tant, b = 0.

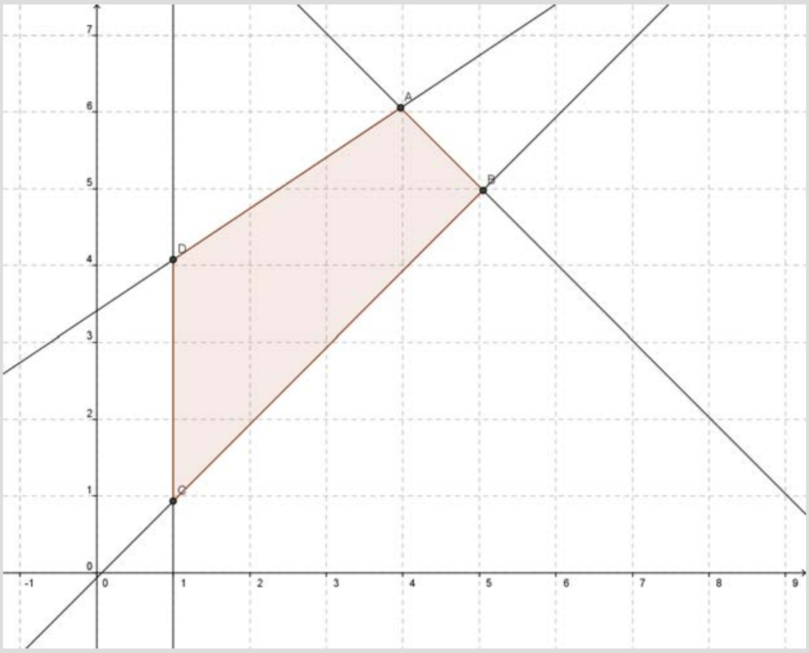
b.
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$. Per tant, la funció f té un extrem a x=1 i un altre a x = 3. Com que $f'>0$ abans de x = 1 i $f'<0$ després de x = 1, el punt (1,4) és un màxim relatiu. Amb el mateix argument arribem a la conclusió que el punt (3,0) correspon a un mínim relatiu.

3. Un fons d'inversions posa en marxa un producte financer que dóna un benefici de R(x) euros en fer una inversió de x centenars d'euros, segons la funció $R(x) = -0{,}01x^2 + 4x + 20$.
   a. Calculeu quina és la inversió que dóna més benefici.
   b. Calculeu el tant per cent de benefici que s'obtindrà amb una inversió de 1000 €, i la corresponent a 10000 €.

a.
$R'(x) = -0{,}02x + 4$. Per tant, aquesta derivada s'anul·la quan $x = \frac{4}{0{,}02} = 200$. Aquest valor correspon a un màxim ja que, quan x < 200, R' és positiva i quan x > 200 R' és negativa. Per tant, la inversió que dóna més benefici és de 20.000 €.

b.
$R(10) = 59$. Per tant, la taxa de rendiment d'una inversió de 1000 euros és del 5,9%.
$R(100) = 320$. Per tant, la taxa de rendiment d'una inversió de 10000 euros és del 3,2%.

4. Considerem la regió del pla representada a la figura adjunta:



a. Determineu les inequacions que defineixen els punts interiors i de la frontera del quadrilàter ABCD.
b. Determineu en quins punts s'abasta el màxim i el mínim de la funció $f(x,y)=2x-2y+7$, i quins són aquests valors.

a.
La recta AB és $y=-x+10$. La recta BC és $y=x$. La recta CD és $x=1$. Finalment, la recta AD és $y=\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}$. Les inequacions que ens demanen són, doncs:

$$\left.\begin{array}{c} x\geq 1 \\ y\geq x \\ x+y\leq 10 \\ 3y-2x\leq 10 \end{array}\right\}.$$

b.
$f(1,1)=7$, $f(1,4)=1, f(4,6)=3, f(5,5)=7$. Per tant, el valor mínim és 1, en el punt D. El màxim és 7, en tots els punts del segment BC.

5. Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 5 & -4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

   a. Determineu la matriu X que verifica $X+BC=A^2$.
   b. Calculeu les matrius C^6 i C^7.

a.
$A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 1\\ -4 & 5\end{pmatrix}$. Per tant, $X=A^2-B\cdot C=\begin{pmatrix}-6 & -1\\ 4 & -5\end{pmatrix}$.

b.
$C^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $C^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ... És a dir, les potències parells seran la identitat, i les senars valdran C.

6. Donada la funció $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$:

   a. Determineu-ne el domini, i els valors de x pels quals el signe de la funció f és negatiu.
   b. Determineu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció f.

a.
El domini de f són tots els nombres reals excepte x = -1 i x = 1.
El numerador de la funció és no negatiu per a qualsevol valor de x. El denominador és negatiu pels valors de x compresos entre -1 i 1. Per tant el signe de la funció és negatiu pels valors de x compresos entre -1 i 1, excepte en x = 0.

b.
$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$. Per tant, y = 1 és asímptota horitzontal de la funció f.
$\lim_{x\to -1} f(x)=\infty, \lim_{x\to 1} f(x)=\infty$. Per tant, x = -1 i x = 1 són asímptotes verticals de la funció f.