

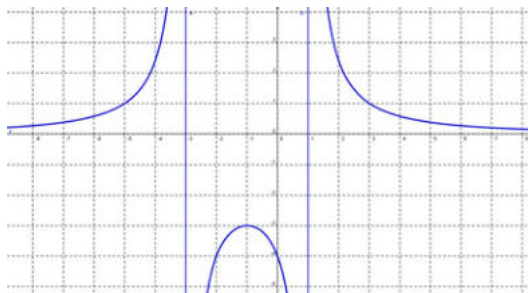
SÈRIE 3

1. Sobre la funció $f(x) = \frac{a}{x^2 + bx + c}$ disposem de les dades següents:

- Les seves asímtotes verticals són $x = -3$ i $x = 1$.
- La seva gràfica passa pel punt $(0, -4)$.
 - a. Determineu la fórmula de la funció, i feu-ne un dibuix aproximat de la gràfica corresponent. [1 punt]
 - b. En el cas $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$ determineu i classifiqueu, si existeixen, els extrems relatius de la funció. [1 punt]

a. Les seves asímtotes fan que la funció hagi de ser de la forma $f(x) = \frac{a}{(x+3)(x-1)}$. A més

tenim que $f(0) = \frac{a}{3 \cdot (-1)} = -4 \rightarrow a = 12$. Per tant, $f(x) = \frac{12}{x^2 + 2x - 3}$. La seva gràfica és:



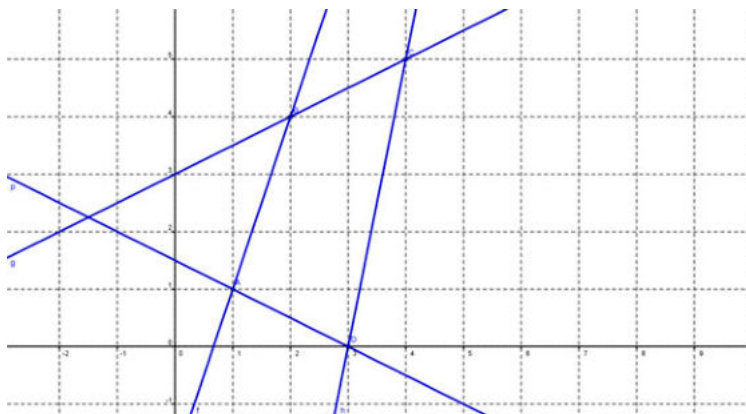
b. En aquest cas la funció és $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 1}$, i la seva derivada és $f'(x) = \frac{-2x + 2}{(x^2 - 2x - 1)^2}$,

que s'anul·la per $x = 1$. Per tant, $(1, -1/2)$ és l'únic extrem relatiu de la funció, i és un màxim perquè f' és positiva per valors propers a 1, però menors, i negativa per a valors propers a 1, però més grans.

2. Construïm en el pla el quadrilàter de vèrtexs $A(1,1)$, $B(2,4)$, $C(4,5)$, $D(3,0)$, els costats del qual són els segments AB , BC , CD i DA .

- a. Escriviu les desigualtats que determinen la regió del pla continguda i sobre els costats del quadrilàter $ABCD$. [1 punt]
- b. Feu servir les desigualtats anteriors per a justificar si els punts $P(3,1)$, $Q(3,4)$, $R(5,2)$ són interiors, exteriors o estan sobre els costats del quadrilàter. [1 punt]

Per a facilitar el problema, dibuixem el quadrilàter:



Fent servir qualsevol dels mètodes trobem les equacions de les quatre rectes:

$$\text{recta que passa per AB: } 3x - y - 2 = 0$$

$$\text{recta que passa per BC: } x - 2y + 6 = 0$$

$$\text{recta que passa per CD: } 5x - y - 15 = 0$$

$$\text{recta que passa per AD: } x + 2y - 3 = 0$$

Per tant, les desigualtats que determinen el quadrilàter són:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y - 2 \geq 0 \\ x - 2y + 6 \geq 0 \\ 5x - y - 15 \leq 0 \\ x + 2y - 3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b. El punt $P(3,1)$ verifica: $9 - 1 - 2 > 0$, $3 - 2 + 6 > 0$, $15 - 1 - 15 < 0$, $3 + 2 - 3 > 0$. Per tant, és interior al quadrilàter ABCD.
 El punt $Q(3,4)$ verifica $9 - 4 - 2 > 0$, $3 - 8 + 6 > 0$, $15 - 4 - 15 < 0$, $3 + 8 - 3 > 0$. Per tant, és interior al quadrilàter ABCD.
 El punt $R(5,2)$ verifica: $15 - 2 - 2 > 0$, $15 - 4 + 6 > 0$, però $25 - 2 - 15 > 0$. Per tant, és fora del quadrilàter ABCD.

3. Considerem les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

- a. Justifiqueu si és possible efectuar $A \cdot B$ o $B \cdot A$. En cas afirmatiu, calculeu-ho. [1 punt]
- b. Calculeu B^2 i B^3 . [1 punt]

a. No és possible calcular $A \cdot B$ perquè el nombre de columnes de A és diferent del nombre de files de B . Sí que podem calcular $B \cdot A$:

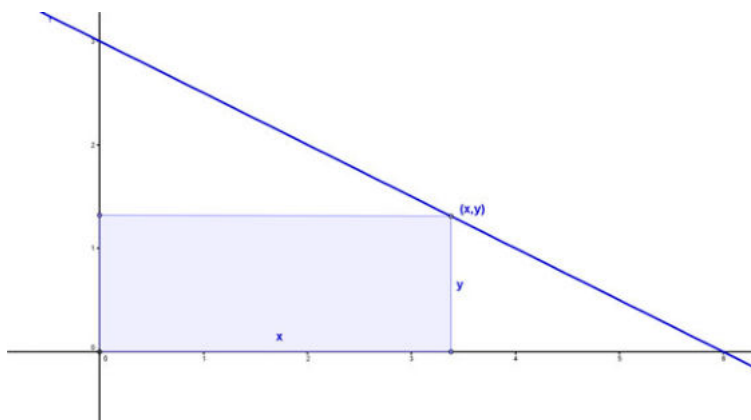
$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

b. $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$, $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -31 \\ 0 & 125 \end{pmatrix}$ §

4. Un triangle té vèrtexs $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(0,3)$.

- a. Dibuixeu-lo i escriviu l'equació de la recta que conté el segment AB . [0,5 punts]
- b. Considerem un punt P situat sobre el segment AB , i dibuixem el rectangle que té diagonal OP i dos costats sobre els eixos de coordenades. Determineu les coordenades de P que fan màxima l'àrea del rectangle. [1,5 punts]

a. L'equació de la recta que conté el segment AB és $y = -\frac{1}{2}x + 3$. El triangle, i el rectangle de què ens parlen a l'apartat b., són aquests:



b. Com que el punt (x,y) es troba sobre la recta, les seves coordenades han de ser de la forma $\left(x, -\frac{1}{2}x + 3\right)$. L'àrea del rectangle és, per tant,

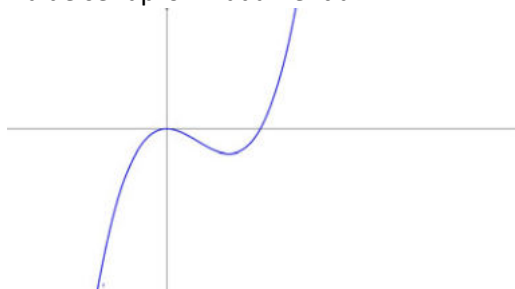
$$A(x) = x \left(-\frac{1}{2}x + 3\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$$

$A'(x) = -x + 3 = 0$ quan $x = 3$. A més, quan $x < 3$ la derivada positiva i quan $x > 3$ és negativa: $x = 3$ correspon a un màxim relatiu. El punt demanat és, per tant, $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$.

5. Sigui f una funció polinòmica de grau 3 amb un màxim a $(0,0)$ i un mínim a $(2,-4)$.

- Feu una gràfica aproximada de f . [0,5 punts]
- Determineu la fórmula de la funció. [1,5 punts]

a. La gràfica de la funció ha de ser aproximadament així:



b. L'equació és de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ i $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Amb les dades que tenim podem escriure:

- $f(0) = 0 \rightarrow d = 0$.
- $f(2) = 8a + 4b = -4$.
- $f'(0) = c = 0$.
- $f'(2) = 12a + 4b = 0$.

D'aquestes condicions obtenim $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$, $d = 0$. La fórmula de la funció és, per tant, $f(x) = x^3 - 3x^2$.

6. En Joan, en Pere i en Marc tenen, entre els tres, seixanta-tres anys. Si en Joan tingués tres anys menys, la seva edat seria el doble de les edats d'en Pere i en Marc junts. Si en Pere tingués un any més, la seva edat seria la meitat de la d'en Marc. Quina és l'edat actual de cadascun d'ells? [2 punts]

El sistema que es dedueix de les dades és, si anomenem J , P , M les respectives edats:

$$\left. \begin{array}{l} J + P + M = 63 \\ J - 3 = 2(P + M) \\ P + 1 = \frac{1}{2}M \end{array} \right\}$$

Ordenant les incògnites i resolent el sistema pel mètode de Gauss obtindrem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 0 & -3 & -3 & -60 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 63 \\ 0 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -3 & -42 \end{array} \right).$$

D'aquí obtenim de seguida $J = 43$, $P = 6$, $M = 14$, que són les edats respectives d'en Joan, en Pere i en Marc.

SÈRIE 1

2. La població de bacteris en una mostra evoluciona segons la funció $f(t) = -t^2 + 4t + 12$, on t correspon al nombre de setmanes des de l'inici de l'experiment, i $f(t)$ és el nombre d'individus que formen la mostra, en milions d'unitats.

- Quantes setmanes han de passar fins a la desaparició de la població? [1 punt]
- Quin serà el nombre màxim d'individus de la mostra, i al cap de quantes setmanes es donarà? [1 punt]

a. $f(t) = -t^2 + 4t + 12 = -(t+2) \cdot (t-6) = 0$ quan $t = 6$. La població de bacteris desapareixerà passades 6 setmanes.

b. $f'(t) = -2t + 4$, que s'anul·la a $t = 2$. Per tant, el màxim de població de bacteris es donarà a $t = 2$. El nombre de bacteris en aquest moment serà de $f(2) = 16$ milions de bacteris a la mostra.

3. Construïm en el pla el triangle de vèrtexs $A(-3,1)$, $B(1,2)$, $C(-2,3)$.

- Trobeu les inequacions que determinen la regió del pla continguda i sobre els costats del triangle ABC. [1 punt]
- Justifiqueu si els punts $P(0,2)$, $Q(2,2)$, $R(-1,2)$ són interiors, exteriors o es troben sobre els costats del triangle. [1 punt]

a. Fent servir qualsevol dels mètodes trobem les equacions de les tres rectes:

$$\text{recta que passa per AB: } x - 4y + 7 = 0$$

$$\text{recta que passa per BC: } x + 3y - 7 = 0$$

$$\text{recta que passa per AC: } 2x - y + 7 = 0$$

Per tant, les desigualtats que determinen el triangle són:

$$\left. \begin{array}{l} x - 4y + 7 \leq 0 \\ x + 3y - 7 \leq 0 \\ 2x - y + 7 \geq 0 \end{array} \right\}$$

b. El punt $P(0,2)$ verifica: $-8 + 7 < 0$, $6 - 7 < 0$, $-2 + 7 > 0$. Per tant, és interior al triangle ABC.

El punt $Q(2,2)$ no verifica la primera desigualtat: $2 - 8 + 7 > 0$. Per tant, és exterior al triangle ABC.

El punt $R(-1,2)$ verifica: $-1 - 8 + 7 < 0$, $-1 + 6 - 7 < 0$, $-1 - 2 + 7 > 0$. Per tant, és interior al triangle ABC.

4. Donada la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, determineu els valors dels tres paràmetres sabent que la gràfica de la funció passa pel punt (1,18) i que té extrems relatius per a $x = -2$ i $x = 4$. [2 punts]

- $f(1) = 18$. Per tant, $1 + a + b + c = 18$.
- $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Per tant, $f'(-2) = 12 - 4a + b = 0$, $f'(4) = 48 + 8a + b = 0$.

De les tres condicions es dedueix $a = -3$, $b = -24$, $c = 44$.

5. Una empresa cinematogràfica disposa de tres sales, A, B i C. Els preus d'entrada a aquestes sales són de 7, 8 i 9 €, respectivament. Un dia determinat la recaptació conjunta de les tres sales va ser de 1520 €, i el nombre total d'espectadors va ser de 200. Si s'haguessin intercanviat els espectadors de les sales A i B, la recaptació total s'hauria incrementat en 20 €. Calculeu el nombre d'espectadors que va acudir a cada una de les sales. [2 punts]

Si anomenem x , y , z el nombre d'espectadors de les sales A, B i C respectivament, obtindrem el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 7x + 8y + 9z = 1520 \\ x + y + z = 200 \\ 8x + 7y + 9z = 1540 \end{array} \right\}$$

que, una vegada resolt per qualsevol mètode, dona com a solució $x = 100$, $y = 80$, $z = 20$. Per tant, la sala A va estar ocupada per 100 espectadors, la B per 80 i la C per 20 espectadors.

6. Considerem la funció $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$.

- Escriu la fórmula de la funció que a cada nombre real, x , li fa correspondre el pendent de la recta tangent a f en el punt d'abscissa x . [1 punt]
- Determineu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = -1$. [1 punt]

a. La funció de què ens estan parlant no és més que la funció derivada, que anomenarem $p(x)$:

$$p(x) = f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 3)^2}.$$

- b. Com que $f(-1) = \frac{1}{4}$ i $f'(-1) = \frac{1}{8}$, la recta tangent és $y - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}(x + 1)$.

7. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Determineu les matrius X i Y tals que $X - 2Y = A$ i $2X - Y = B$. [1 punt]

b. Calculeu $(A + 2 \cdot \text{Id})^2$, on Id és la matriu identitat. [1 punt]

a. Resolent el sistema com un sistema numèric obtenim $X = \frac{1}{3}(2B - A)$,

$$Y = \frac{1}{3}(B - 2A) \text{ d'on, operant, obtenim } X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10/3 & 2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8/3 & 5 \end{pmatrix}.$$

b. $(A + 2 \cdot \text{Id})^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 6 & 42 \end{pmatrix}$.