SÈRIE 4

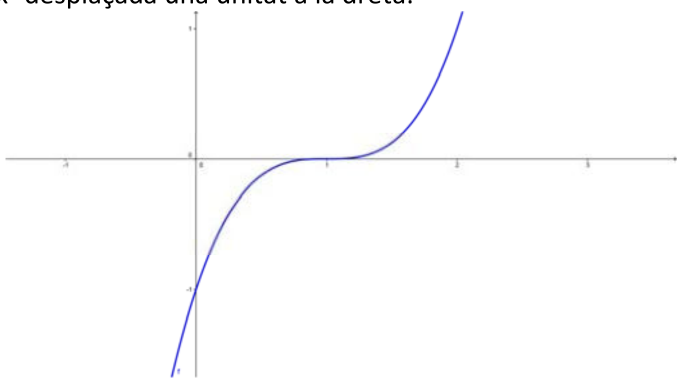
1. Considerem les funcions $f(x)=(x-a)^3$, $g(x)=-x^2+bx+c$.
   a. Determineu els valors dels paràmetres que fan que les dues corbes tinguin la mateixa tangent en el punt (2,1). *[1,5 punts]*
   b. En el cas a = 1, feu un gràfic aproximat de la funció f. *[0,5 punts]*

a. La informació de l'enunciat es tradueix així:

- $f(2)=(2-a)^3=1 \to a=1$.
- $g(2)=-4+2b+c=1$.
- $\left.\begin{array}{l} f'(x)=3(x-a)^2 \to f'(2)=3(2-a)^2=3 \\ g'(x)=-2x+b \to g'(2)=-4+b \end{array}\right\} \to -4+b=3 \to b=7$.

A partir d'aquí, de la segona condició deduïm c = - 9.

b. Es tracta de $x^3$ desplaçada una unitat a la dreta:



2. Considerem la funció $f(x)=\dfrac{12}{x}$.
   a. Indiqueu-ne el domini i estudieu-ne el creixement. *[1 punt]*
   b. Calculeu les equacions de les rectes tangents a la gràfica de f que són paral·leles a la recta y + 3x = 2. *[1 punt]*

a. $\operatorname{Dom} f = R-\{0\}$. $f'(x)=\dfrac{-12}{x^2}$, que és negatiu en tot el domini: *f* és decreixent en tot el seu domini.

b. La recta que ens donen té pendent -3. $-\dfrac{12}{x^2}=-3 \to x=\pm 2$. A més, $f(-2)=-6$ i $f(2)=6$. D'aquí obtenim les dues rectes tangents: $y=-3x-12$ i $y=-3x+12$.

3. Una botiga ven llaunes de beguda a 0,6 € la llauna, però si comprem un paquet de sis llaunes ens cobren 3 €.
   a. Quin és el percentatge d'estalvi en comprar un paquet respecte a la compra de sis llaunes soltes? *[1 punt]*
   b. En una setmana la botiga ha venut 240 llaunes, i ha ingressat 132,6 €. Quants paquets de sis llaunes ha venut? *[1 punt]*

a. 6 llaunes per separat costen 6 · 0,6 = 3,6 €. L'estalvi per cada paquet és, per tant, de 0,6 € respecte de 3,6 €. En tant per cent, $\frac{0,6 \cdot 100}{3,6} = 16,6\%$.

b. Suposem que ha venut x paquets i y llaunes. Aleshores el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{r} 6x + y = 240 \\ 3x + 0,6y = 132,6 \end{array}\right\}.$$

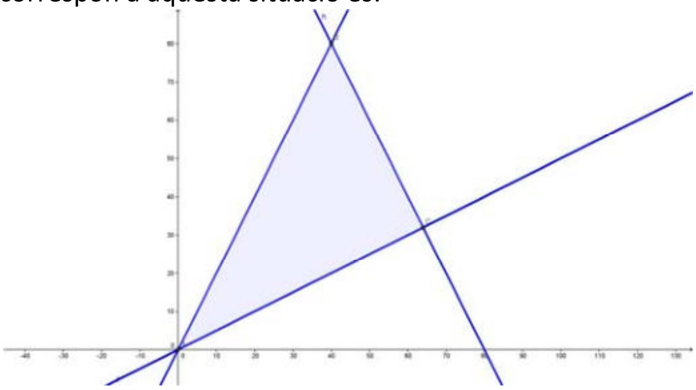
que, una vegada resolt, ens dóna x = 19, y = 126. Per tant, han venut 19 paquets i 126 llaunes soltes.

4. Una petita fàbrica produeix formatge i mantega. Per fabricar un formatge es necessiten 10 litres de llet, mentre que per fabricar una pastilla de mantega se'n necessiten 5. La quantitat de formatges produïts no pot superar el doble de la quantitat de pastilles de mantega. De la mateixa manera, la quantitat de pastilles de mantega tampoc no pot superar el doble de la quantitat de formatges produïts. En total disposen de 800 litres de llet. Després de la venda, per cada formatge s'obté un benefici de 5€ i per cada pastilla de mantega s'obté un benefici de 2€. Determineu quina quantitat de formatges i quina quantitat de pastilles de mantega cal produir per tal que el benefici total després de la venda sigui màxim. Quin benefici s'obtindrà? *[2 punts]*

Anomenarem x a la quantitat de formatges que es produiran i y a la quantitat de pastilles de mantega. Les condicions que cal complir són, doncs,

$$\left.\begin{array}{r} x \le 2y \\ y \le 2x \\ 10x + 5y \le 800 \end{array}\right\}.$$

La gràfica que correspon a aquesta situació és:

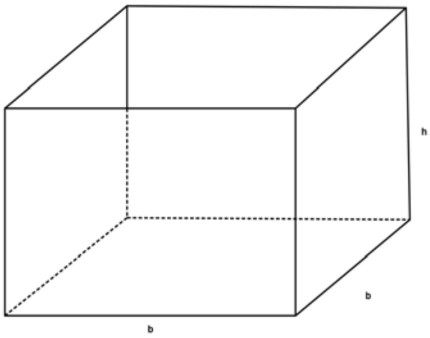


Els vèrtexs del triangle són A(0,0), B(64,32), C(40,80). La funció que cal fer màxima és $B(x,y) = 5x + 2y$. El seu valor en els vèrtexs del triangle és:

- $B(0,0) = 0$.
- $B(64,32) = 384$.
- $B(40,80) = 360$.

Per tant, el màxim benefici s'obtindrà fabricant 64 formatges i 32 pastilles de mantega, el què reportarà un benefici de 384 €.

5. Disposem de 48 cm$^2$ de material per a fabricar una capsa de base quadrada, sense tapa. Calculeu les dimensions de la capsa de volum més gran que podem construir en aquestes condicions. Quin serà el volum de la capsa? *[2 punts]*




L'àrea total de la capsa serà: $4bh + b^2 = 48$, i el seu volum és $V = b^2h$. Aïllant h de la primera equació obtenim $h = \frac{48 - b^2}{4b}$. Per tant, la funció que cal maximitzar és

$V(b) = b^2 \cdot \frac{48 - b^2}{4b} = \frac{1}{4}(48b - b^3)$. La seva derivada és $V'(b) = \frac{1}{4}(48 - 3b^2)$. Els seus extrems relatius són aquells valors tals que la derivada val zero:

$$48 - 3b^2 = 0 \rightarrow b^2 = 16 \rightarrow b = \pm 4.$$

És clar que només ens interessa la solució positiva. Per a b = 4 obtenim h = 2. A més, per a valors més petits que b = 4 la derivada és positiva i per a valors més grans és negativa. Per tant, aquest valor és un màxim; la capsa més gran tindrà base de 4 cm. de costat i de 2 cm. d'alçada. El seu volum és de 32 cm$^3$.

6. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

   a. Trobeu una matriu X tal que A·B + X = C. *[1 punt]*
   b. Calculeu C$^3$. *[1 punt]*

a. Aïllant tenim X = C – A·B. A més, $A{\cdot}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Per tant, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. $C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$.