

SÈRIE 1

PAUTES PER ALS CORRECTORS

RECORDEU:

- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.
- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.
- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

1. Donada una funció f , sabem que $f'(x) = e^{-x} \cdot (2x^2 - 3x)$.
 - a. Estudieu el creixement i decreixement de la funció f . [1 punt]
 - b. Si la funció f té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los. [1 punt]

a. Estudiem el signe de f' : la part exponencial és sempre estrictament positiva. Hem d'estudiar, per tant, $2x^2 - 3x = x(2x - 3)$, que s'anul·la a $x = 0$ i a $x = 3/2$. Per tant, com que en els intervals $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ f' és positiva, la funció f serà estrictament creixent; a l'interval $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ f' és negativa. Per tant, f serà estrictament decreixent.

Criteris de correcció: Raonament: 0,5 p. Càlculs: 0,25 p. Resposta: 0,25 p.

b. Com a conseqüència de l'apartat anterior, la funció té un màxim relatiu per a $x = 0$, i un mínim relatiu per a $x = 3/2$.

Criteris de correcció: Determinació dels punts: 0,5 p. Classificació: 0,5 p.

2. La Júlia, en Pol i la Maria han anat a comprar fruita. La Júlia ha comprat un quilograms de pomes, dos de préssecs i tres de taronges, i ha pagat 9 €. En Pol ha comprat dos quilograms de pomes i quatre de préssecs, i ha pagat 12 €. La Maria, en canvi, ha comprat quatre quilograms de pomes i dos de taronges, i ha pagat 8 €. Calculeu el preu del kilogram de cadascuna de les fruites. [2 punts]

Anomenarem x al preu per quilo de pomes, y al de préssecs i z al de taronges. La traducció algebraica de l'enunciat serà el sistema d'equacions:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x + 4y = 12 \\ 4x + 2z = 8 \end{array} \right\}$$

En resoldre'l per qualsevol mètode obtenim $x = 1.5$, $y = 2.25$, $z = 1$. Per tant, les pomes van a 1.50 €/Kg, els préssecs a 2.25 €/Kg i les taronges a 1 €/Kg.

Criteris de correcció: Plantejar el problema: 1 p. Resolució: 0.5 p. Resposta al problema: 0.5 p.

3. Els dos darrers anys, el valor de les accions en Borsa d'una empresa ha baixat un 20% anual.
- Aquest any, en canvi, les accions han pujat un 30%. Quin és el percentatge global de pèrdua en aquests tres anys? [1 punt]
 - Quin hauria de ser el percentatge de guanys d'aquest tercer any si el balanç global dels tres anys acaba sent equilibrat, és a dir, sense pèrdues ni guanys? [1 punt]

a. Suposem que una acció té un valor de C euros a l'inici del període. Aleshores el valor de l'acció serà:

- en acabar el primer any: $0,8C$.
- en acabar el segon any: $0,8^2C = 0,64C$.
- en acabar el tercer any: $1,3 \cdot 0,64C = 0,832C$.

Per tant, el balanç final ha estat de $1 - 0,832 = 0,168$. S'han produït unes pèrdues globals del 16,8%.

Criteris de correcció: 0,5 p. pels càlculs al final de cada any. 0,5 p. pel percentatge final.

- b. El valor final ha de ser igual al valor inicial. Per tant, ha de ser $C = 0,64 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)C$ d'on obtenim $x = 56,25\%$.

Criteris de correcció: 0,75 punts pel plantejament, 0,25 p. pel càlcul.

4. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = (-2 \ 5)$.

- Resoleu l'equació matricial $X + 2A = X \cdot A$, on X és la matriu incògnita. [1 punt]
- Hi ha cap matriu Y que verifiqui $Y \cdot A = B$? I que verifiqui $A \cdot Y = B$? Justifiqueu les respostes. [1 punt]

a. Aïllant X a l'equació obtenim $X \cdot (A - Id) = 2A$. Ara, ja sigui calculant $(A - Id)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ o bé plantejant un sistema de quatre equacions amb quatre incògnites, obtenim $X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Criteris de correcció: Aïllar X: (0.5 p. Càlcul de X: 0.5 p.

b. La primera de les respostes és positiva ja que $Y \cdot A = B \rightarrow Y = B \cdot A^{-1}$; aquest producte podrà efectuar-se ja que el nombre de columnes de B és igual al nombre de files de A^{-1} . També es pot respondre calculant-ho directament. Per la mateixa raó no és possible efectuar $A \cdot Y = B \rightarrow Y = A^{-1} \cdot B$.

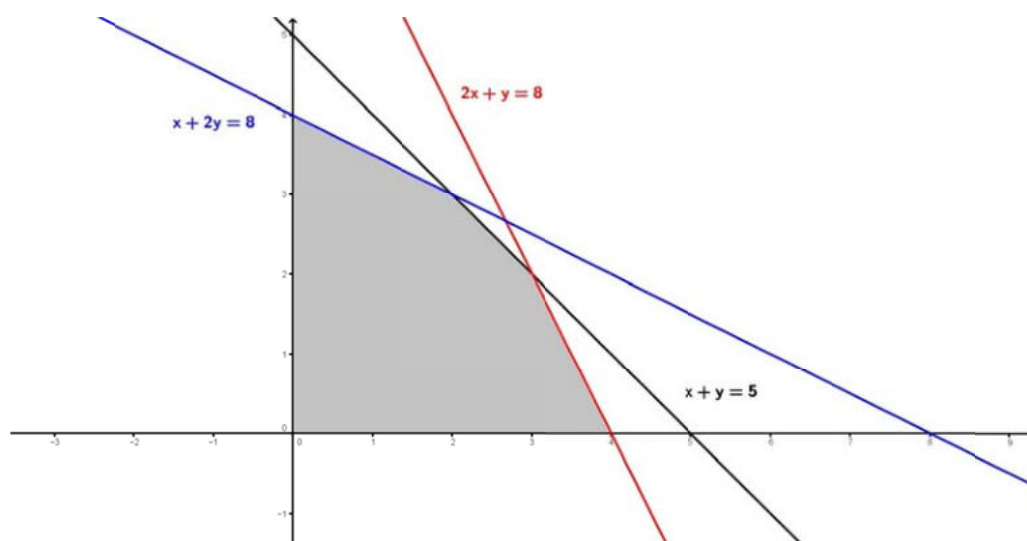
Criteris de correcció: 0.5 punts per cada justificació, a criteri del corrector.

5. Un florista disposa de 50 margarides, 80 roses i 80 clavells, i en fa rams de dues classes: per a uns fa servir 10 margarides, 20 roses i 10 clavells. Per a l'altra classe de rams fa servir 10 margarides, 10 roses i 20 clavells. La primera classe de rams es ven a 40 €, mentre que la segona es ven a 50 €. Quants rams de cada classe ha de fer si vol ingressar el màxim possible. [2 punts]

Si anomenem x al nombre de rams del primer tipus, i y al nombre de rams del segon tipus, les condicions del problema es tradueixin a:

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 10y \leq 50 \\ 20x + 10y \leq 80 \\ 10x + 20y \leq 80 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y \leq 5 \\ 2x + y \leq 8 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

Dibuixant les dades del problema obtenim:



Els cinc vèrtexs són, en sentit horari: (0,0), (0,4), (2,3), (3,2) i (4,0). Els beneficis corresponen a la funció objectiu $B(x,y) = 40x + 50y$. En cada cas els beneficis són $B(0,0) = 0$, $B(0,4) = 200$, $B(2,3) = 230$, $B(3,2) = 220$, $B(4,0) = 160$. Per tant, els ingressos més grans s'obtenen fabricant 2 rams del primer tipus i 3 del segon tipus.

Criteris de correcció: Plantejament de les inequacions: 1 p. Càlcul dels vèrtexs: 0.5 p. Dibuix: 0.25 p. Càlcul del valor màxim: 0,25 p.

6. La demanda d'energia elèctrica d'una ciutat, comptada a partir de la mitjanit fins a les vuit del matí, és donada per la funció $f(t) = \frac{t^2 - 6t + 12}{6}$, on t s'expressa en hores (h) i f(t) en milions de kilowatts hora (Kw h).

- A quina hora el consum coincideix amb el de la mitjanit, i quin és aquest consum? [1 punt]
- A quina hora es donarà el mínim consum? Justifiqueu que, efectivament, es tracta d'un mínim. [1 punt]

a. El consum a mitjanit és $f(0) = 2$. Ara caldrà determinar t amb $f(t) = 2$: $t^2 - 6t = 0 \rightarrow t = 0, t = 6$: A les 6 h. del matí el consum serà el mateix que a mitjanit.

criteris de correcció: Consum a mitjanit: 0.25 p. Plantejament i resolució de l'equació: 0.75 p..

b. $f'(t) = \frac{1}{6}(2t - 6)$, que val zero quan $t = 3$. Com que f' és negativa abans de 3 i és positiva després de 3, efectivament es tracta d'un mínim.

criteris de correcció: Càlcul del mínim: 0.5 p. Justificació que és mínim: 0.5 p.