SÈRIE 1

1. La Maria té el doble dels diners que tenen en Pol i la Júlia junts. En Pol té la sisena part de diners que la Maria. La Júlia té el doble de diners que en Pol. La Maria té el triple dels diners que la Júlia.

   (a) Amb aquestes dades, podem saber quants diners tenen cadascun d'ells? Trobeu el conjunt de solucions possibles. (1,5 punts)

   Si anomenem x als diners que té la Maria, y els que té en Pol i z els de la Júlia, les condicions del problema es tradueixen per

   $$\left.\begin{array}{rcl} x &=& 2(y+z) \\ y &=& x/6 \\ z &=& 2y \\ x &=& 3z \end{array}\right\}$$

   que, en resoldre'l per qualsevol mètode, dóna com a solució $x = 6y$, $z = 2y$. Per tant, el sistema té infinites solucions.

   (b) Si en Pol té 35 euros, quants diners tenen la Maria i la Júlia? (0,5 punts)

   Substituint y per 35, obtenim que la Maria té 210 euros i la Júlia en té 70.

2. Una empresa ven un producte a un preu de p euros. El nombre d'unitats venudes depèn del preu que fixem segons la funció

   $$V(p) = \frac{30p + 10}{p}\,.$$

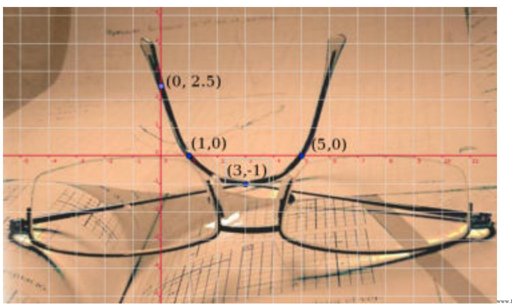
   (a) Demostreu que, en augmentar els preus, les vendes disminueixen. (1 punt)

   $V'(p) = -\dfrac{10}{p^2}$, que ´es negativa per a tot valor de p. Per tant, com més augmenti el preu menors seran les vendes.

   (b) És possible que l'empresa vengui 20 unitats del producte? Si el preu augmenta indefinidament, què passarà amb les vendes? (1 punt)

   $\dfrac{30p+10}{p} = 20 \;\rightarrow\; p = -1$, que és impossible. A més, $\lim\limits_{p\to\infty} V(p) = 30$. Per tant, tenint en compte que $V(p)$ és una funció monòtona decreixent, les vendes tendiran a estabilitzar-se per sobre de 30 unitats.

3. La següent *fotografia matemàtica* sembla indicar que les branques de les ulleres formen una paràbola. Tanmateix, no totes les corbes en forma de "$\bigcup$' són paràboles. Hem marcat sobre uns eixos de coordenades alguns dels punts: $(0, 2,5)$, $(1, 0)$, $(3, -1)$ i $(5, 0)$.



Justifiqueu si la gràfica correspon a una paràbola o no. (2 punts)

Si es tracta d'una paràbola, la seva equació serà de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Com que ha de passar pels punts indicats, haurà de complir: $f(1) = a + b + c = 0$, $f(5) = 25a + 5b + c = 0$, $f(3) = 9a + 3b + c = -1$. L'equació de la paràbola que passa per aquests tres punts seria, doncs, $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$, que no passa per $(0, 0.25)$. Per tant, no es tracta d'una paràbola.

4. (a) La matriu ampliada d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Justifiqueu, sense resoldre'l, si el sistema és incompatible, compatible indeterminat, o determinat. (1 punt)

La matriu és de rang 3 perquè és triangular. Per tant, el sistema és compatible determinat.

(b) Considereu ara la matriu d'un altre sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Justifiqueu si és incompatible o compatible i, en aquest darrer cas, resoleu-lo. (1 punt)

El rang de la matriu associada i el de la matriu ampliada és 2. Per tant, el sistema és compatible indeterminat, i la solució és $x = 2 - z, \quad y = 2z - 1, \quad z = z$.

5. Considereu la funció:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}.$$

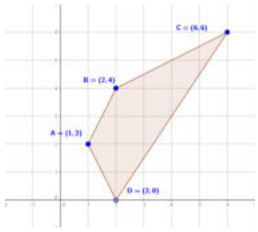
(a) Determineu els punts en què la funció f talla cadascun dels eixos. Determineu també els intervals en què la funció f és positiva. (1 punt)

$f(0) = \frac{1}{3}$. Per tant, la funció talla l'eix d'ordenades en el punt $\left(0, \frac{1}{3}\right)$. D'altra banda, si $f(x) = 0$ vol dir que $x + 1 = 0$, d'on $x = -1$. Per tant, f talla l'eix d'abscisses en el punt $(-1, 0)$. A més, com que el denominador és positiu per a tot x, f serà positiva quan $x > -1$.

(b) Determineu els punts en què la recta tangent a la gràfica de f és horitzontal. (1 punt)

$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2+3)^2}$, que, fent $f'(x) = 0$ ens dóna $x = -3$ i $x = 1$. Com que $f(-3) = -\frac{1}{6}$ i $f(1) = \frac{1}{2}$, els punts on la recta tangent és horitzontal són $\left(-3, -\frac{1}{6}\right)$ i $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

6. Considereu el quadrilàter de la figura adjunta:



(a) Definiu les condicions que han de complir els punts del quadrilàter ombrejat, incloent-hi la frontera. (1,5 punts)

Les rectes que defineixen els segments són, respectivament: recta AD: $y = -2x + 4$, recta AB: $y = 2x$, recta BC: $y = \frac{1}{2}x + 3$, recta CD: $y = \frac{3}{2}x - 3$. Per tant, els punts del quadrilàter han de verificar:

$$\left.\begin{array}{rcc} y & \geq & -2x+4 \\ y & \leq & 2x \\ y & \leq & \frac{1}{2}x+3 \\ \\ y & \geq & \frac{3}{2}x-3 \end{array}\right\}$$

(b) Justifiqueu analíticament si el punt $P = (4,3)$ pertany al quadrilàter. (0,5 punts)

Cal comprovar que $(4,3)$ compleix les quatre condicions.