SÈRIE 1

---

1. Considereu les matrius M de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ en què a és un nombre real.
   a. Determineu a de manera que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$. *[1 punt]*
   b. Determineu a de manera que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, en què M^{-1} representa la matriu inversa de M. És a dir, $M \cdot M^{-1} = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2. *[1 punt]*

a) Comencem calculant M^2: $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix}$.
Sabem que $\begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$. Obtenim, per tant, que cal que es compleixi que $4 - a^2 = 3$ i que $-a^2 = -1$. En ambdós casos tenim que $a^2 = 1$, que té per solucions $a = 1$ i $a = -1$.

b) Sabem que $M \cdot M^{-1} = I$. Però com que sabem la forma que ha de tenir M^{-1}, tenim que $M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 2+2a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$. I imposant que aquesta darrera matriu ha de ser igual a la matriu identitat, tenim que $-a = 1$, és a dir, que $a = -1$, i que $2 + 2a = 0$, que també es compleix quan $a = -1$. Per tant, l'única solució és $a = -1$.
Alternativament es pot calcular la matriu inversa M^{-1} i igualar a la forma que ha de tenir segons l'enunciat del problema.

Criteris de correcció: a) Càlcul de M^2: 0,5 p. Plantejament de la igualtat matricial: 0,25 p. Obtenció dels dos possibles valors de a: 0,25 p. b) Plantejament del problema: 0,5 p. Obtenció del valor de a: 0,5 p.

---

2. Considereu la funció $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$, en què a és un paràmetre real.
   a. Trobeu per a quins valors del paràmetre a la recta tangent a la funció f en $x = 1$ és paral·lela a $y + 3x + 5 = 0$. *[1 punt]*
   b. Per al valor del paràmetre $a = 1$, trobeu els intervals de creixement i decreixement i els punts on s'assoleixen els màxims i mínims relatius de la funció f. *[1 punt]*

a. Com que la derivada és el pendent de la recta tangent, hem d'imposar la condició $f'(1) = -3$. La derivada de la funció donada f és

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2\,a\,x}{(x-a)^2}$$

Per tant, hem de resoldre l'equació

$$\frac{1-2a}{(1-a)^2} = -3$$

o equivalentment $3\,a^2 - 8a + 4 = 0$, que dona com a solucions $a = 2$ i $a = \frac{2}{3}$.

b. Hem d'estudiar la funció $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ que té domini $\mathbb{R}$-$\{1\}$. La derivada és

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2\,x}{(x-1)^2}$$

i s'anul·la en $x = 0$ i $x = 2$.
Estudiant els signes de la derivada obtenim:

$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2, \infty)$
$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' > 0$
f creixent	f decreixent	f decreixent	f creixent

Es dedueix que la funció f té un màxim relatiu al punt $(0, f(0)) = (0{,}0)$ i un mínim relatiu al punt $(2, f(2)) = (2{,}4)$.

Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,25 p. Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció dels punts: 0,25 p. b) Obtenció dels intervals de creixement i decreixement: 0,5 p. Obtenció i justificació dels extrems relatius: 0,5 p.

---

3. En Pol va quedar ahir amb uns amics en un bar i van prendre 4 refrescos, 3 entrepans i 5 boles de gelat. Tot plegat els va costar 19,50€. Dies enrere, havia anat al mateix bar amb el seu cosí Martí i per 2 refrescos, 1 entrepà i 2 boles de gelat havien pagat 8,10€. En aquest bar tots els refrescos valen el mateix, tots els entrepans tenen el mateix preu i les boles de gelat es venen també a preu únic.
   a. Avui en Pol hi ha tornat amb uns altres amics i han pres 6 refrescos, 5 entrepans i 8 boles de gelat. Expliqueu raonadament quant han pagat en total. *[1 punt]*
   b. Si 1 refresc, 1 entrepà i 1 bola de gelat costen 5,10€, quant val el refresc, l'entrepà i la bola de gelat separadament? *[1 punt]*

a) Si anomenem x, y i z respectivament el preu d'un refresc, d'un entrepà i d'una bola de gelat sabem que es compleixen les dues equacions següents:

$$\begin{Bmatrix} 4x + 3y + 5z = 19{,}50 \\ 2x + y + 2z = 8{,}10 \end{Bmatrix}$$

Ara necessitem calcular el valor de $6x + 5y + 8z$, però observem que podem descompondre $6x + 5y + 8z$ en

$$2 \cdot (4x + 3y + 5z) - 1 \cdot (2x + y + 2z) = 6x + 5y + 8z$$

Per tant, el preu serà $2 \cdot 19{,}50 - 1 \cdot 8{,}10 = 30{,}90$€.

Una altra opció és buscar la solució del sistema $\begin{Bmatrix} 4x + 3y + 5z = 19{,}50 \\ 2x + y + 2z = 8{,}10 \end{Bmatrix}$, que és un sistema compatible indeterminat amb solució:

$\begin{Bmatrix} x = 2{,}40 - \frac{t}{2} \\ y = 3{,}30 - t \\ z = t \end{Bmatrix}$ i, per tant, $6x + 5y + 8z = 6 \cdot \left(2{,}40 - \frac{t}{2}\right) + 5 \cdot (3{,}30 - t) + 8t =$
$14{,}40 - 3t + 16{,}50 - 5t + 8t = 30{,}90$€.

b) En aquest cas, tenim el sistema de tres equacions amb tres incògnites:
$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=5{,}10 \\ 4x+3y+5z=19{,}50 \\ 2x+y+2z=8{,}10 \end{array}\right\}$ que, si el resolem, per exemple, pel mètode de Gauss obtenim $x=1{,}80$€, $y=2{,}10$€ i $z=1{,}20$€.

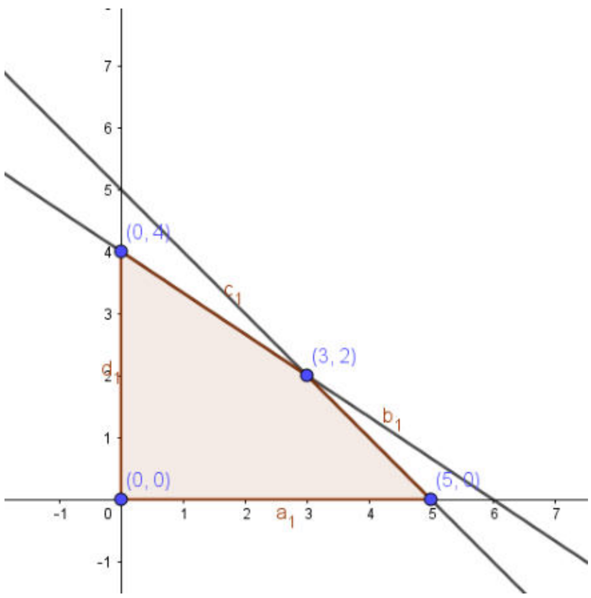
Criteris de correcció: a) Plantejament del sistema: 0,25 p. Obtenció de la solució per qualsevol dels mètodes possibles: 0,75 p. b) Plantejament del sistema: 0,25 p. Obtenció de la solució: 0,75 p.

---

4. Una empresa de materials per a cotxes fabrica dos models d'una peça determinada, que anomenarem A i B. Cada model es fabrica en una hora, mitjançant un procés que consta de dues fases. En la primera fase del procés s'hi destinen 5 treballadors, i en la segona, 12. Per a fabricar cada model, en la primera fase es necessita un treballador per a cada peça. En canvi, en la segona fase es necessiten dos treballadors per al model A i 3 treballadors per al model B. El benefici que s'obté és de 40€ pel model A i 50€ pel model B.
   a. Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió factible. *[1,25 punts]*
   b. Quantes peces de cada model per hora s'hauran de fabricar per tal que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim? *[0,75 punts]*

a) Anomenem x la quantitat de peces del model A i y la quantitat de peces del model B.
L'enunciat del problema ens condueix a les restriccions següents:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y\leq 5 \\ 2x+3y\leq 12 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right.$$



Els beneficis venen donats per la següent funció objectiu: $B(x,y) = 40x + 50y$.

b) Si avaluem la funció objectiu en els quatre vèrtexs obtenim:
$B(0,0) = 0€$,
$B(5,0) = 200€$,
$B(0,4) = 200€$ i
$B(3,2) = 220€$.

Per tant, la funció objectiu assoleix en la regió factible el seu valor màxim en el punt (3,2) i aquest màxim pren el valor 220€. Així doncs, per a maximitzar els beneficis cal fabricar 3 peces del model A i 2 peces del model B. Amb aquesta fabricació l'empresa aconseguirà 220 euros de beneficis.

Criteris de correcció: Obtenció de les restriccions: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. Obtenció dels vèrtexs i dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció del punt pel qual s'assoleix el màxim: 0,5 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

---

5. Una companyia de mòbils va presentar fa un any un telèfon intel·ligent al preu de 750€. Recentment, un estudi de mercat ha arribat a la conclusió que, amb aquest preu, compren el telèfon 2.000 clients al mes, i que la relació entre aquestes dues variables és lineal, de manera que per cada 10 euros que s'incrementa el preu del mòbil, el compren 100 clients menys, i a l'inrevés: per cada 10 euros de descompte sobre el preu inicial de 750 euros, el compren 100 clients més.
   a. Deduïu que la funció que determina els ingressos mensuals de la companyia segons el preu del mòbil és $I(p) = -10p^2 + 9500p$. *[1 punt]*
   b. Trobeu quin ha de ser el preu del mòbil per a obtenir ingressos, el preu del mòbil que dona els ingressos mensuals més elevats i el valor d'aquests ingressos màxims. *[1 punt]*

a) El preu del mòbil serà $p = 750 + 10x$, en què x és el nombre de vegades que s'augmenta el preu de l'abonament en 10 euros. El nombre de mòbils que es vendran al mes serà $N = 2000 - 100x$.
L'ingrés mensual I vindrà donat pel preu del mòbil p multiplicat pel nombre de mòbils que es venguin N, és a dir, $I = p \cdot N$. Si volem posar la funció d'ingrés en funció del preu del mòbil, caldrà aïllar la x en funció del preu p $\left(p = 750 + 10x \rightarrow x = \frac{p-750}{10}\right)$, llavors el nombre de mòbils en funció del preu p serà: $N = 2000 - 100\left(\frac{p-750}{10}\right) \rightarrow N = -10p + 9500$. Així que la funció d'ingressos serà: $I(p) = p \cdot (-10p + 9500)$.
Obtenim, per tant, la paràbola $I(p) = -10p^2 + 9500p$.

b) Perquè hi hagi ingressos cal que $I(p) > 0 \rightarrow -10p^2 + 9500p > 0 \rightarrow p \cdot (-10p + 9500) > 0$. Per tant, o bé $p > 0$ i $-10p + 9500 > 0$, d'on obtenim $0€ < p < 950€$, o bé caldria que $p < 0$ i que $(-10p + 9500) < 0$, que no té sentit per la naturalesa del problema.

Per trobar el màxim ingrés derivem: $I'(p) = -20p + 9500$, i igualem a zero: $I'(p) = 0 \rightarrow p = 475$ €. Comprovem que correspon als ingressos màxims ja que $I'(p) > 0$, per a $p < 475$ i $I'(p) < 0$, per a $p > 475$. Finalment, per calcular el valor d'aquests ingressos màxims, només cal calcular el valor de la funció Ingrés per a $p = 475 \rightarrow I(475) = 475 \cdot (-10 \cdot 475 + 9500) = 475 \cdot 4750 = 2.256.250$€

També es pot resoldre tenint en compte que la gràfica de la funció d'ingrés és una paràbola i obtenint-ne el màxim.

Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,25 p. Obtenció de la funció d'ingressos: 0,75 p. b) Obtenció de l'interval de valors perquè hi hagi ingressos: 0,5 p. Obtenció del preu pel qual s'obté el màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim i obtenció dels beneficis màxims: 0,25 p.

---

6. El nombre d'individus, en milions, d'una població ve determinat per la funció $P(t) = \frac{5+t^2}{(t+1)^2}$, en què t mesura el nombre d'anys transcorreguts.
   a. Quina és la població inicial i la població després de 9 anys? A partir de quin moment la població serà inferior a un milió d'individus? *[1 punt]*
   b. Amb el pas dels anys, cap a quin valor tendirà el nombre d'individus de la població? *[1 punt]*

a) Ens demanen que calculem la població inicial $P(0) = 5$ milions d'habitants i la població al cap de 9 anys, $P(9) = 0{,}86$ milions d'habitants.

Hem de trobar també a partir de quin instant la població serà inferior a un milió d'habitants, és a dir, per a quin valor de t es compleix $\frac{5+t^2}{(t+1)^2} < 1$. Aïllant obtenim $t > 2$, és a dir, a partir del segon any la població serà inferior a un milió d'habitants.

b) Hem de calcular el límit quan el temps tendeix a infinit. Tenim que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{5+t^2}{(t+1)^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2+5}{t^2+2t+1} = 1$$

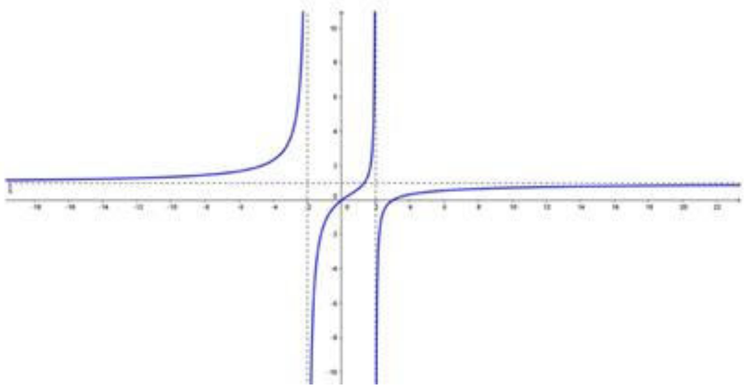
Per tant, la grandària de la població a llarg termini tendirà a un milió d'habitants.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la població inicial: 0,25 p. Càlcul de la població al cap de 9 anys: 0,25 p. Càlcul de l'instant en què la població passa a ser inferior a un milió d'habitants: 0,5 p. b) Plantejament que cal calcular el límit: 0,25 p. Càlcul del límit: 0,75 p.

SÈRIE 5

1. Sigui la funció $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-4}$
   a. Indiqueu-ne justificadament el domini i determineu els punts en què la gràfica de *f* talla l'eix de les abscisses. *[1 punt]*
   b. Estudieu-ne el creixement i feu un esbós aproximat de la gràfica de la funció. *[1 punt]*

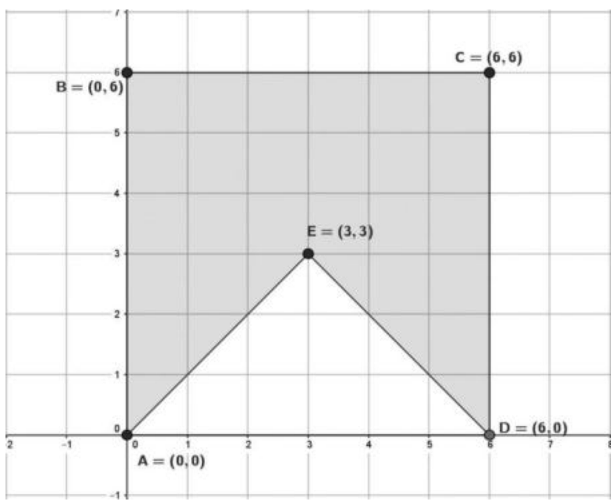
a) $x^2 - 4 = 0$ si $x = \pm 2$, per tant, el domini de f són tots els nombre reals excepte aquests dos. D'altra banda, $x^2 - 3x = 0$ quan $x = 0$ o $x = 3$: la gràfica de *f* talla l'eix d'abscisses en els punts (0,0) i (3,0).
b) La derivada de la funció *f* és $f'(x) = \frac{3x^2-8x+12}{(x^2-4)^2}$. Com que $3x^2 - 8x + 12 = 0$ no té solucions reals i *f'* sempre és positiva la funció *f* és creixent en tot el seu domini. La seva gràfica aproximada és:



Criteris de correcció: a) Determinació del domini, expressat de qualsevol forma: 0,5 p. Punts de tall amb l'eix d'abscisses: 0,5 p.. b) Estudi del creixement: 0,5 p. Gràfica aproximada: 0,5 p

---

2. Considereu el pentàgon ABCDE de la figura següent:



a) Justifiqueu que la regió ombrejada no es pot representar mitjançant un sistema d'inequacions. *[1 punt]*
b) Escriviu el sistema d'inequacions que determina els punts de la frontera i de l'interior del triangle AED. *[1 punt]*

a) Si considerem la recta que passa pels punts A, E i C, d'equació $y = x$, determina dos semiplans $y < x$ i $y > x$, i cap dels dos pot contenir alhora els punts B i D.

b) La recta AE es $y = x$. La recta ED es $y = -x + 6$. La recta AD es $y = 0$. El sistema d'inequacions es:

$$\begin{cases} y \leq x \\ y \leq -x + 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Criteris de correcció: a) Raonament correcte: 1 p. b) Equacions: 0,5 p. Sistema d'inequacions: 0,5 p.

---

3. Sigui $y = f(x)$ una paràbola que té el vèrtex en el punt V = (0, −4) i talla l'eix de les abscisses en els punts (−2, 0) i (2, 0).
a) Determineu-ne l'equació. *[1 punt]*
b) Sigui una funció g tal que $g'(x) = f(x)$. Estudieu el creixement de la funció g, determineu-ne les abscisses dels extrems relatius i classifiqueu-los.*[1 punt]*

a) L'equació de la paràbola serà $y = a(x - 0)^2 - 4$ i, si ha de passar pels dos punts que ens donen, obtenim que $a = 1$. Per tant, l'equació de la paràbola és $y = x^2 - 4$. Alternativament es pot plantejar un sistema de tres equacions i tres incògnites a partir dels tres punts.
b) La paràbola és positiva per a $x < -2$ o $x > 2$, i negativa per $-2 < x < 2$. Per tant, la funció g és creixent en els dos primers intervals i decreixent en l'altre. Conseqüentment, g té un màxim relatiu en $x = -2$ i un mínim relatiu en $x = 2$.

Criteris de correcció: a) 1 p. b) Raonament del creixement: 0,5 p. Determinació d'extrems i classificació: 0,5 p.

---

4. Considereu el sistema d'equacions $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{cases}$

Justifiqueu si les afirmacions següents són certes:

a) Aquest sistema d'equacions representa dues rectes paral·leles perquè totes dues tenen pendent -1. *[1 punt]*

b) Aquest sistema és compatible determinat i la solució és $x = 1$, $y = 1$. *[1 punt]*

a) Les rectes son $y = 2x - 1$ que té pendent 2 i $y = -x + 2$ que té pendent -1. Per tant no són paral·leles.

b) Si resolem el sistema format per les dues equacions obtenim la solució $x = 1$, $y = 1$. Alternativament podem comprovar que $x = 1$, $y = 1$ satisfà les dues equacions.

Criteris de correcció: a) Raonament que no poden ser paral·leles: 1 p. b) Raonament que aquesta és la solució:1 p.

---

5. Un fabricant d'automòbils produeix els models Record i Astrid. Desa la producció en tres naus. A la primera nau té 150 vehicles del model Record i 120 vehicles del model Astrid. A la segona guarda 80 Record i 140 Astrid. Finalment, a la tercera nau emmagatzema 250 Re-cord i 125 Astrid. A més, el preu dels automòbils Record és de 6.520 €, mentre que cada Astrid val 8.130 €. Tota aquesta informació està recollida en les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 6.520 \\ 8.130 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Què representa la matriu $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$? Calculeu-la. *[1 punt]*

b) Què representa la matriu $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}$? Calculeu-la. *[1 punt]*

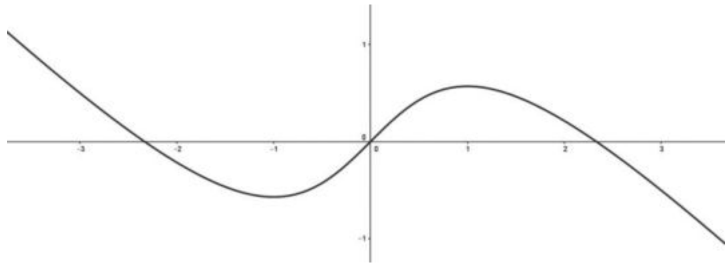
a) El producte $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ ens dona el nombre de cotxes que tenim de cada model: $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 480 & 385 \end{pmatrix}$.

b) El producte $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}$ ens dona el valor total dels cotxes emmagatzemats: $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P} = 6.259.650$.

Criteris de correcció: a) Significat de la matriu: 0,75p. Càlcul: 0,25 p. b) Significat de la matriu: 0,75p. Càlcul: 0,25 p.

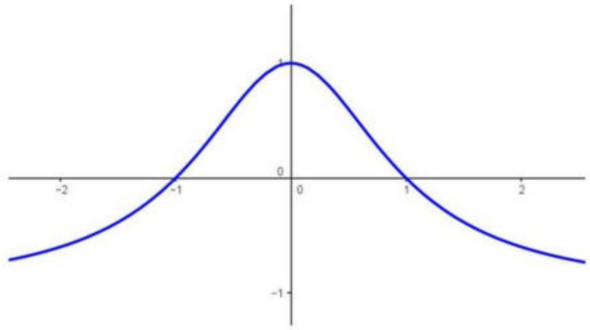
---

6. A continuació es mostra la gràfica d'una funció f que presenta un mínim relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$ i un màxim relatiu en el punt d'abscissa $x = 1$.



a) Sabent que $f'(0) = 1$, determineu l'equació de la recta tangent a f que passa per l'origen de coordenades. *[1 punt]*
b) Feu un esbós de la gràfica de la funció f' amb les dades de què disposeu. *[1 punt]*

a) El pendent de la recta tangent és 1, i passa per l'origen. Per tant l''equació serà $y = x$.
b) Com que f és decreixent fins a $x = -1$, en aquest interval f' serà negativa. Si $-1 < x < 1$ la funció és creixent. Per tant, la derivada és positiva, mentre que si $x > 1$ la derivada torna a ser negativa. Com que a més a més sabem que $f'(0) = 1$, la gràfica serà aproximadament així



Criteris de correcció: a) Obtenció del pendent: 0,5p. Equació de la recta: 0,5 p. b) Raonament: 0,5 p. Obtenció de la gràfica aproximada: 0,5 p.