SÈRIE 5

PAUTES PER ALS CORRECTORS

RECORDEU:
- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho amb més de dos decimals.
- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.
- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

---

1. Volem enviar una data codificada. Per a fer-ho, considerem el vector de tres components $X = (d\ m\ a)$, en el qual d expressa el dia, m el mes i a l'any. Tot seguit, fem l'operació $X \cdot A + B$, en què A i B són les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } B = (5 \quad -5 \quad 5).$$

El resultat d'aquesta operació és el vector codificat que enviem.

a) Si la data que volem enviar és l'1 de gener de 2019, és a dir, si $X = (1\ 1\ 2019)$, quin és el vector codificat que enviarem? [0,75 punts]

b) Si el vector codificat que ens ha arribat és (2036 1 –13), quina és la data sense codificar? [1,25 punts]

a) Si calculem el vector codificat obtenim

$$(1 \quad 1 \quad 2019) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (5 \quad -5 \quad 5) = (2025 \quad -4 \quad 3).$$

Per tant, el vector que hem d'enviar és $(2025 \quad -4 \quad 3)$.

b) En aquest cas, si $(x\ y\ z)$ és el vector de la data sense codificar, tenim

$$(x \quad y \quad z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (5 \quad -5 \quad 5) = (2036 \quad 1 \quad -13).$$

Fent les operacions, trobem que hem de resoldre el sistema següent:

$$\begin{cases} x + z + 5 = 2036 \\ y - 5 = 1 \\ -x - y + 5 = -13 \end{cases}$$

Aquest sistema té per solucions $x = 12$, $y = 6$ i $z = 2019$. És a dir, la data buscada és el 12 de juny de 2019.

Criteris de correcció: a) Obtenció del producte de $X \cdot A$: 0,5 p. Obtenció del resultat final de l'apartat: 0,25 p. b) Plantejament de la igualtat matricial: 0,25 p. Obtenció de les equacions: 0,5 p. Resolució del sistema d'equacions: 0.25 p. Expressió de la resolució del problema en forma de data: 0,25 p.

2. Per a la campanya d'aquest estiu, una botiga d'esports que ven patinets elèctrics espera vendre 40 patinets a un preu de 1.000 € per patinet. Segons un estudi de mercat, la relació entre el nombre de vegades que es rebaixa el preu del patinet en 50 € i el nombre de patinets venuts és lineal, i, per cada 50 € de rebaixa en el preu de venda de cada patinet, hi haurà un increment de les vendes de 10 patinets més.

a) Escriviu la funció d'ingressos de la botiga en funció del nombre de vegades que rebaixi en 50 € el preu inicial de 1.000 € del patinet. [1 punt]

b) Trobeu quin ha de ser el preu del patinet per tal d'obtenir els ingressos màxims. Trobeu també el nombre de patinets que es vendran i els ingressos que s'obtindran amb aquest preu. [1 punt]

a) La funció d'ingressos de la empresa serà el nombre de patinets multiplicat pel preu de cada patinet:

$$I(x) = (40 + 10x) \cdot (1.000 - 50x),$$

on x és el nombre de vegades que es rebaixa el preu de cada patinet en 50 euros.
Fent el producte, obtenim que la funció d'ingressos serà la següent:

$$I(x) = -500x^2 + 8.000x + 40.000.$$

b) Per calcular els ingressos màxims, derivem la funció:

$$I'(x) = -1.000x + 8.000,$$

i, tot seguit, la igualem a zero:

$$I'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{8.000}{1.000} = 8.$$

Comprovem que aquest valor correspon a un màxim perquè la derivada és positiva per $x < 8$ i negativa per $x > 8$.
El preu del patinet pel qual s'aconsegueixen els ingressos màxims serà de $1.000 - 50 \cdot 8 = 600$ euros, i el nombre de patinets que es vendran serà de $40 + 10 \cdot 8 = 120$ patinets. Finalment, els ingressos que s'obtindran seran de $120 \cdot 600 = 72.000$ euros.

Criteris de correcció: a) Obtenció del nombre de patinets venuts en funció de x: 0,25 p. Obtenció del preu del patinet en funció de x: 0,25 p. Obtenció de la funció d'ingressos: 0,5 p. b) Obtenció del punt on s'assoleix el màxim i comprovació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció del preu del patinet: 0,25 p. Càlcul del nombre de patinets que es vendran: 0.25 p. Càlcul dels ingressos que s'obtindran: 0,25 p.

3. Es preveu un canvi important en la població d'una determinada zona per qüestions mediambientals. El nombre d'habitants de la zona, en milions, vindrà donat per la funció $P(t) = \frac{t^2+28}{(t+2)^2}$, en què t mesura el temps en anys des del moment actual (t = 0).

a) Digueu quin és el nombre d'habitants de la zona actualment i quin serà aquest nombre a molt llarg termini. [1 punt]

b) En quin moment s'arribarà al nombre mínim d'habitants? Quants habitants hi haurà en aquell moment? Quin és el nombre màxim d'habitants que s'assoleix en aquesta zona? [1 punt]

a) Es demana la població quan $t = 0$, és a dir, $P(0) = \frac{28}{(2)^2} = 7$. Per tant, la població actual és de 7 milions d'habitants. Pel que fa a la població a molt llarg termini, hem de calcular el límit següent:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2+28}{(t+2)^2} = 1.$$

Per tant, a molt llarg termini la població de la zona tendirà a 1 milió d'habitants.

b) Cal estudiar el signe de la funció derivada per trobar els màxims i mínims de la funció. Comencem calculant la derivada:

$$P'(t) = \frac{2t\cdot(t+2)^2 - (t^2+28)\cdot 2\cdot(t+2)}{(t+2)^4} = \frac{4\cdot(t-14)}{(t+2)^3}.$$

Si imposem que $P'(t) = 0$ obtenim $t = 14$. Estudiem, a continuació, la monotonia de la funció per valors de $t \geq 0$:

	$[0,14)$	14	$(14,+\infty)$
$P'(t)$	<0	0	>0
$P(t)$	↓	Mínim	↑

Per tant, al cap de 14 anys la població assolirà el seu mínim i serà de

$$P(14) = \frac{14^2+28}{(14+2)^2} = 0.875.$$

És a dir, al cap de 14 anys hi haurà 875.000 habitants.

Per a l'estudi de la monotonia de la funció, i tenint en compte que en el límit la població tendeix de forma creixent cap a 1, observem que el màxim nombre d'habitants correspon al moment actual ($t = 0$) i és de 7 milions d'habitants.

Criteris de correcció: a) Població al moment actual: 0,5 p. Obtenció del límit: 0,5 p. b) Obtenció del punt on s'assoleix el mínim: 0,25 p. Comprovació que es tracta d'un mínim: 0,25 p. Obtenció del nombre d'habitants que hi haurà en aquell instant: 0,25 p. Raonament del nombre màxim d'habitants: 0,25 p.

---

4. En tres sortejos consecutius de la Lotto 6/49 hi ha hagut 51 persones que han encertat els 6 números de la combinació guanyadora en algun dels tres sortejos. El nombre de persones que van encertar la combinació guanyadora en el tercer sorteig és la meitat del total de persones que la van encertar en els dos primers sortejos junts. També sabem que el nombre de persones que van encertar la combinació guanyadora en el primer sorteig supera en 11 el total de persones que van encertar-la en el segon i en el tercer sortejos junts. Amb aquestes dades, calculeu quantes persones van encertar la combinació guanyadora de la Lotto 6/49 en cada un dels tres sortejos. [2 punts]

Anomenem x, y i z al nombre de persones que han encertat la combinació guanyadora en el primer, el segon i el tercer sorteig, respectivament.
El sistema que obtenim és el següent:

$$\begin{cases} x+y+z=51 \\ z=\dfrac{x+y}{2} \\ x-11=y+z \end{cases}$$

És a dir,

$$\begin{cases} x+y+z=51 \\ x+y-2z=0 \\ x-y-z=11 \end{cases}$$

Si el resolem aplicant el mètode de Gauss tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51 \\ 1 & -1 & -1 & 11 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51 \\ 0 & 2 & 2 & 40 \\ 0 & 0 & 3 & 51 \end{array}\right),$$

d'on deduïm que $z=17$, $y=3$ i $x=31$. Per tant, en el primer sorteig van encertar la combinació guanyadora 31 persones; en el segon, 3, i en el tercer, 17.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,75 p. Resolució del sistema:1 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.

---

5. Considereu una funció $f(x)$ que té com a primera derivada $f'(x) = 2x^2 + bx + 4$, en què b és un paràmetre real.

a) Determineu el valor de b perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en $x = -1$ i raoneu si es tracta d'un màxim o d'un mínim. [1 punt]

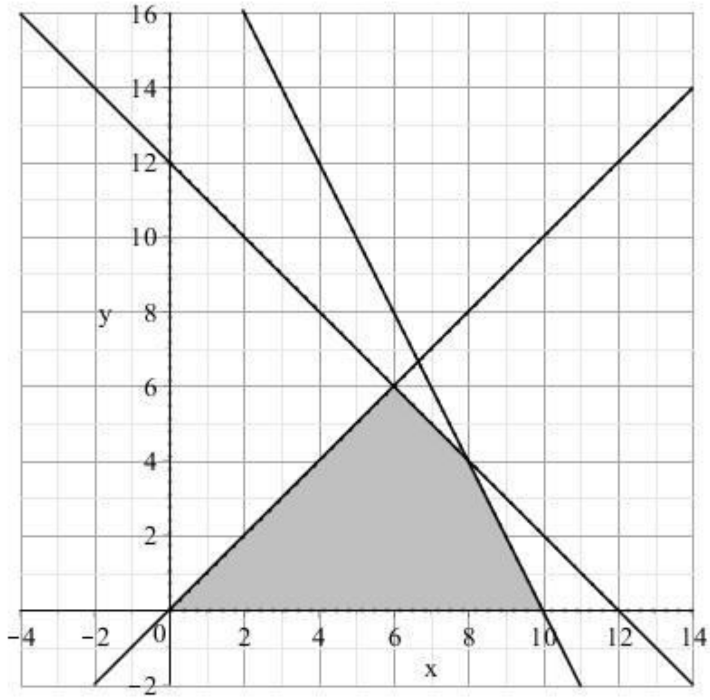
b) Si sabem que la gràfica de la funció $f(x)$ passa pel punt $(0, 3)$, trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en aquest punt. [1 punt]

a) Sabem que en $x = -1$ hi ha un extrem relatiu; per tant, $f'(-1) = 0$. D'altra banda, $f'(-1) = 2 - b + 4 = -b + 6$, i, conseqüentment, trobem que $b = 6$.
Per tant, tenim que $f'(x) = 2x^2 + 6x + 4$. Si estudiem on és positiva i on es negativa la funció $f'(x)$, obtenim que és positiva en els intervals $(-\infty, -2)$ i $(-1, +\infty)$, mentre que és negativa en l'interval $(-2, -1)$. Per tant, en $x = -1$ hi ha un mínim relatiu.
b) El pendent de la recta buscada és $f'(0)$. Sabem que $f'(x) = 2x^2 + bx + 4$ i, per tant, $f'(0) = 4$.
La recta tangent en el punt (0,3) és $y - 3 = 4(x - 0)$, és a dir, $y = 4x + 3$.

Criteris de correcció: a) Determinació del paràmetre b: 0,5 p. Identificació que es tracta d'un mínim: 0,5 p. b) Determinació del pendent: 0,5 p. Determinació de la recta tangent: 0,5 p.

6. Un forn artesà fa dos tipus de panets, els integrals i els de cereals. En l'elaboració, a més a més de la farina corresponent, es fa servir llevat de massa mare i aigua. La quantitat de llevat de massa mare i d'aigua que s'utilitza en l'elaboració de cada panet depèn de si es tracta d'un panet integral o de cereals.

Volem saber quants panets de cada tipus es poden fer. Després de comprovar la quantitat de massa mare i d'aigua de què es disposa, i tenint en compte que la quantitat de panets de cereals no pot superar la de panets integrals, s'obté la regió següent amb totes les possibilitats.



En el gràfic, l'eix de les x representa el nombre de panets integrals, i el de les y, el nombre de panets de cereals.

a) Escriviu les inequacions que donen lloc a aquesta regió factible. [1 punt]

b) Si els panets integrals es venen a 8 € cada unitat i els de cereals a 10 €, quants panets de cada tipus cal vendre per a obtenir els màxims ingressos? Quins són aquests màxims ingressos? [1 punt]

a) Les rectes que limiten la regió factible són:

- Recta que passa per $(10,0)$ i $(8,4)$. Té una pendent de $m = \frac{4-0}{8-10} = -2$. Per tant, és de la forma $y = -2x + n$. Sabent que passa pel punt $(10,0)$ trobem que $n = 20$ i que, per tant, la recta és $y = -2x + 20$.
- Recta que passa per $(12,0)$ i $(6,6)$. Té una pendent de $m = \frac{6-0}{6-12} = -1$. Per tant, és de la forma $y = -x + n$. Sabent que passa pel punt $(12,0)$ trobem que $n = 12$ i que, per tant, la recta és $y = -x + 12$.
- La recta que passa per $(0,0)$ i $(1,1)$ és $y = x$.
- L'eix d'abscisses $y = 0$ i l'eix d'ordenades $x = 0$.

Substituint algun dels punts de la regió factible a les rectes, s'obtenen les inequacions següents:

$$\begin{cases} y \le -2x + 20 \\ y \le -x + 12 \\ y \le x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

b) La recaptació és la funció objectiu i és de la forma $R(x, y) = 8x + 10y$. La recaptació màxima s'assoleix en un dels vèrtex de la regió factible. Calculem la recaptació en cadascun dels vèrtex per veure en quin s'assoleix el màxim:

$A = (0,0)$ Recaptació $R(A) = 0$ €
$B = (6,6)$ Recaptació $R(B) = 108$ €
$C = (8,4)$ Recaptació $R(C) = 104$ €
$D = (10,0)$ Recaptació $R(D) = 80$ €

La recaptació màxima és de 108 € i s'obté amb 6 panets integrals i 6 panets de cereals.

Criteris de correcció: a) Obtenció del sistema d'inequacions: 1 p. b) Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. Obtenció dels vèrtexs: 0,25 p. Obtenció dels valors de la funció objectiu en els vèrtexs: 0,25 p. Obtenció de la recaptació màxima: 0,25 p.