SÈRIE 4

PAUTES PER ALS CORRECTORS

RECORDEU:

- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, tanmateix aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.
- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.
- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

---

1. Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$. Estudieu per a quins valors de x la matriu inversa de la matriu A coincideix amb la seva oposada, és a dir, $A^{-1} = -A$. *[2,5 punts]*

Hem de trobar els valors de $\boldsymbol{x}$ per als quals es compleix que $\boldsymbol{A^{-1} = -A}$.

D'una banda, $-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{x} & \boldsymbol{2} \\ -\boldsymbol{5} & \boldsymbol{x} \end{pmatrix}$.

D'altra banda, sabem que $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = I}$, on $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat d'ordre 2. Per tant, hem de trobar els valors de $\boldsymbol{x}$ per als quals es compleix:

$$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comencem fent el primer producte:

$$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2+10 & 0 \\ 0 & -x^2+10 \end{pmatrix}.$$

Com que sabem que

$$\begin{pmatrix} -x^2+10 & 0 \\ 0 & -x^2+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hem de resoldre l'equació $\boldsymbol{-x^2 + 10 = 1}$, que té per solucions $\boldsymbol{x = -3}$ i $\boldsymbol{x = 3}$.

Criteris de correcció: Plantejament del problema: 0,5 p. Càlcul del producte de matrius: 0,75 p. Obtenció de l'equació: 0,5 p. Obtenció de les solucions: 0,75 p.

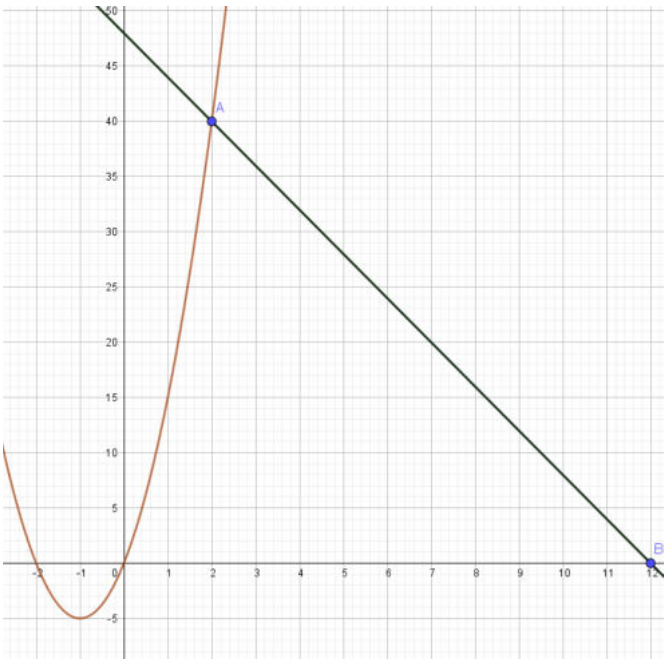
---

2. Un fabricant va tenir un producte a la venda durant deu anys. Durant aquest temps, el preu del producte P, en euros, va estar relacionat amb el temps que feia que estava a la venda t, expressat en anys, seguint la funció següent:

$$P(t) = \begin{cases} 5(t+1)^2 - 5 & si\ 0 \leq t \leq 2 \\ -4t + 48 & si\ 2 < t \leq 10 \end{cases}$$

   a) Indiqueu els intervals de creixement i de decreixement del preu del producte durant aquests deu anys. *[1,25 punts]*
   b) Trobeu el preu màxim que va assolir el producte durant el temps que va estar a la venda i calculeu la taxa de variació mitjana del preu del producte durant els darrers cinc anys que va estar a la venda. *[1,25 punts]*

a) Si es fa una representació gràfica de la funció, tenim que



Observem que en $[0,2]$ la funció $P(t)$ té l'expressió d'una funció quadràtica $P_1(t) = 5t^2 + 10t$, la seva derivada és $P_1{}'(t) = 10t + 10$, que s'anul·la en $t = -1$, fora de l'interval $[0,2]$. Comprovem que en l'interval $[0,2]$, la derivada de la funció $P_1(t)$ és positiva i, per tant, en $[0,2]$ la funció $P(t)$ és creixent.

En $(2,10]$ la funció $P(t)$ té l'expressió d'una funció lineal $P_2(t) = -4t + 48$. Com que la seva derivada és $P_2{}'(t) = -4$ la funció $P_2(t)$ és sempre decreixent i en particular en l'interval demanat.

Per tant, $P(t)$ és creixent en $[0,2)$ i és decreixent en $(2,10]$.

b) Pel que hem vist en l'apartat anterior, el valor màxim de $P(t)$ en [0,10] s'assoleix en $x = 2$ i el valor de la funció en aquest punt és $P(2) = 40$ euros.

Finalment, la taxa de variació mitjana dels darrers 5 anys és
$TVM(5,10) = \frac{P(10)-P(5)}{10-5} = \frac{8-28}{5} = -4$ euros.

Criteris de correcció: a) Raonament que la funció és creixent en [0,2): 0,75 p. Raonament que la funció és decreixent en (2,10]: 0,5 p. b) Obtenció del preu màxim: 0,5 p. Càlcul de la taxa de variació mitjana: 0,75 p.

3. Una coneguda marca fabrica dues versions d'una mateixa fragància: el perfum, que és més concentrat i que es ven en ampolles petites que costen 70 euros, i la colònia, que és més diluïda i que es ven en ampolles més grans a 82 euros. En la fabricació cal barrejar dos ingredients: l'ingredient A (que conté l'aroma concentrat) i l'ingredient B (que conté alcohol i altres substàncies). En aquests moments el fabricant disposa de 5.000 ml de l'ingredient A i de 30.000 ml de l'ingredient B. Per a fabricar una ampolla de perfum calen 10 ml de l'ingredient A i 40 ml de l'ingredient B, i per a fabricar-ne una de colònia calen 10 ml de l'ingredient A i 90 ml de l'ingredient B. Les comandes actuals obliguen a fabricar almenys 120 unitats de perfum i 70 unitats de colònia.
   a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible. *[1,25 punts]*
   b) Quantes unitats cal produir de cada versió per a obtenir, un cop venudes, uns ingressos màxims? Quins són aquests ingressos? *[1,25 punts]*

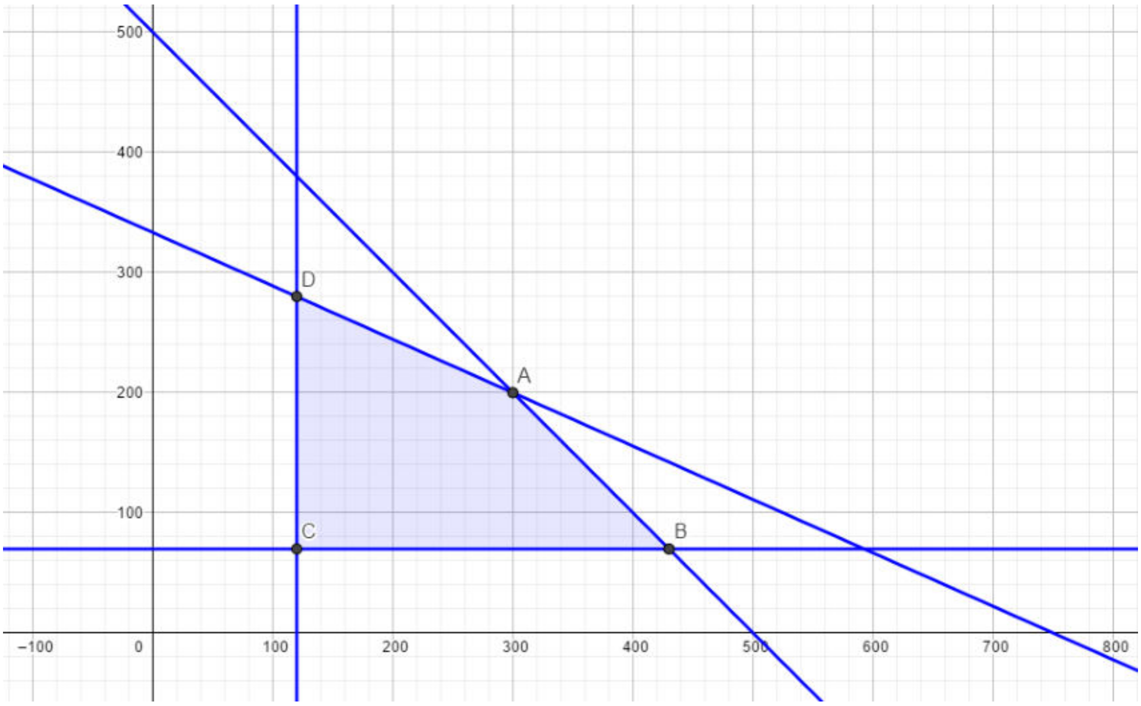
a) Denotem per a x el nombre d'unitats produïdes de perfum i per a y, el nombre d'unitats de colònia. El sistema d'inequacions donat per les restriccions és

$$\begin{cases} x \geq 120 \\ y \geq 70 \\ 10\,x + 10\,y \leq 5.000 \\ 40\,x + 90\,y \leq 30.000 \end{cases}$$

Clarament el podem simplificar i treballar amb el sistema següent:

$$\begin{cases} x \geq 120 \\ y \geq 70 \\ x + y \leq 500 \\ 4\,x + 9\,y \leq 3.000 \end{cases}$$

La funció objectiu és $F(x, y) = 70\,x + 82\,y$ i la regió factible serà:



b) Els vèrtexs de la regió factible són: $A = (300{,}200)$, $B = (430{,}70)$, $C = (120{,}70)$ i $D = (120{,}280)$. Avaluant la funció objectiu als quatre vèrtexs s'obté:

$F(A) = 37.400$, $F(B) = 35.840$, $F(C) = 14.140$ i $F(D) =$ 31.360

Deduïm, per tant, que el benefici màxim s'obté fabricant 300 unitats de perfum i 200 unitats de colònia. El benefici que s'obtindria en aquest cas és de 37.400 euros.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim i del benefici màxim: 0,75 p.

4. Considerem les funcions $f(x) = x^2 + ax + b$ i $g(x) = -x^2 + c$.
   a) Calculeu els valors dels paràmetres a, b i c per tal que les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$ es tallin en els punts $(-1, 3)$ i $(3, -5)$. *[1,25 punts]*
   b) Per a $c = 4$, trobeu l'equació de la recta tangent a $g(x)$ en el punt d'abscissa $x = -1$. *[1,25 punts]*

a) Imposem que les dues funcions passin per aquests dos punts. Cal que $f(-1) = 3$, $f(3) = -5$ i que $g(-1) = 3$ i $g(3) = -5$.

De les dues igualtats primeres tenim que

$$\begin{cases} 1 - a + b = 3 \\ 9 + 3a + b = -5 \end{cases}$$

I, resolent el sistema, trobem que $a = -4$ i $b = -2$.

De les igualtats de la funció g, tenim que

$$\begin{cases} -1 + c = 3 \\ -9 + c = -5 \end{cases}$$

I, en ambdós casos, obtenim que $c = 4$.

b) Considerem ara $g(x) = -x^2 + 4$. Observem que $g(-1) = 3$, per tant, la recta tangent a $g(x)$ en $x = -1$ passa pel punt $(-1,3)$.

El pendent de la recta tangent serà $m = g'(-1)$ on g' és la derivada de la funció g. Comencem calculant la derivada:

$$g'(x) = -2x$$

I, per tant, $g'(-1) = 2$.

Així doncs, l'equació de la recta tangent a $g(x)$ en $x = -1$ és $y - 3 = 2(x + 1)$, és a dir, $y = 2x + 5$.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,5 p. Obtenció dels tres paràmetres: 0,25 p. cadascun b) Obtenció de l'ordenada del punt: 0,25 p. Càlcul de la derivada: 0,25 p. Obtenció del pendent: 0,25 p. Obtenció de la recta tangent: 0,5 p.

5. Un triatló consta de tres segments que cal realitzar practicant tres modalitats d'esport diferents: natació, ciclisme i cursa a peu. La distància total que es recorrerà en el triatló és de 75 km. Sabem que el recorregut en bicicleta és igual a quatre vegades la distància que cal recórrer nedant i corrent conjuntament. Sabem també que si sumem 3 km a la distància que es fa corrent ens dona el mateix que cinc vegades el recorregut que es fa nedant. Determineu la distància recorreguda en cada modalitat. *[2,5 punts]*

Anomenem x, y i z les distàncies recorregudes nedant, corrent i en bicicleta, respectivament.

Obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x+y+z=75 \\ z=4(x+y) \\ y+3=5x \end{cases} \text{->} \begin{cases} x+y+z=75 \\ 4x+4y-z=0 \\ 5x-y=3 \end{cases}$$

El resolem utilitzant el mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 75 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{->} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 75 \\ 0 & 0 & -5 & -300 \\ 0 & -6 & -5 & -372 \end{array}\right)$$

I obtenim $x = 3, y = 12$ i $z = 60$.

És a dir, les distàncies que cal recórrer són 3 km nedant, 12 km corrent i 60 km en bicicleta.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 1 p. Resolució del sistema: 0,75 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p. per cada variable.

6. La funció $Q(x) = (x+1)^2(32-x)$, en què $x \in [-1{,}32]$, representa la producció, en quilograms, d'una hortalissa en un hivernacle en funció de la temperatura x, expressada en graus centígrads (°C), que pot variar entre -1 °C i 32 °C.

a) Calculeu quina és la temperatura de l'hivernacle amb la qual s'obté la màxima producció. Quina producció d'hortalissa obtindrem a aquesta temperatura? *[1,25 punts]*

b) Calculeu a quines temperatures s'assoleix el nivell mínim de producció i quin és aquest valor mínim. *[1,25 punts]*

a) Cal determinar el valor de x per al qual la funció $Q(x)$ té un màxim en l'interval $[-1{,}32]$. Observem que:

$$Q(x) = (x+1)^2(32-x) = -x^3 + 30x^2 + 63x + 32$$

Comencem calculant la derivada:

$$Q'(x) = -3x^2 + 60x + 63$$

Si igualem la derivada a zero, $-3x^2 + 60x + 63 = 0$ obtenim que la derivada s'anul·la en els punts d'abscissa $x = -1$ i $x = 21$.

Per saber si en aquests punts hi ha un màxim o un mínim locals, estudiem el signe de la derivada. Observem que la derivada $Q'(x)$ és negativa per a $x < -1$ (a nosaltres només ens interessa en l'interval $[-1{,}32]$ però, com a funció polinòmica, $(x+1)^2(32-x)$, està ben definida per a tot valor de x i ens serveix per a estudiar el seu comportament). D'altra banda, $Q'(x)$ és positiva en l'interval $(-1{,}21)$ i torna a ser negativa per a $x > 21$. Per tant, en $x = -1$ hi ha un mínim local i en $x = 21$ hi ha un màxim local. Tenint en compte el comportament de la funció en l'interval $[-1{,}32]$ aquest màxim local és també el màxim en aquest interval.

Així doncs, la temperatura òptima per a mantenir l'hivernacle és de 21°C.
A aquesta temperatura, la producció serà de:

$$Q(21) = -21^3 + 30\cdot 21^2 + 63\cdot 21 + 32 = 5.324 \text{ kg.}$$

b) La funció $(x+1)^2(32-x)$ té un mínim local en $x = -1$°C, que correspon a una producció de $Q(-1) = 0$. Com que la funció és decreixent per $x > 21$, hem de comprovar el valor de la funció en l'extrem superior de l'interval on la tenim definida per saber si aquest mínim local és també el mínim global que estem buscant. Observem que $Q(32) = 0$.

Per tant, tant a una temperatura de -1 °C com a una temperatura de 32°C, no s'obtindrà cap producció.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Comprovació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Càlcul de la producció màxima: 0,25 p. b) Càlcul del punt on s'assoleix el mínim local: 0,25 p. Càlcul del valor de la funció en aquest punt: 0,25 p. Comprovació del valor de la funció en l'extrem superior de l'interval: 0,25 p. Obtenció del resultat final: 0,5 p.