SÈRIE 2

PAUTES PER ALS CORRECTORS

RECORDEU:

- Podeu valorar amb tants decimals com ho considereu convenient, però aconsellem no fer-ho amb més de dos decimals.

- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.

- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

1.

a) Volem resoldre la inequació $f(x) \geq 0$. Resolem primer l'equació $f(x) = 0$. Obtenim:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-0{,}2)(-20)}}{2(-0{,}2)} = \frac{-5 \pm 3}{-0{,}4} = \begin{cases} x = 5 \\ x = 20 \end{cases}$$

Per la naturalesa del problema, la funció només té sentit per a valors de $x > 0$ (no està definida per a $x = 0$), i observem que els valors per als quals $f(x) \geq 0$, i en què, per tant, la fàbrica no té pèrdues, són els de l'interval $[5, 20]$.

b) Comencem calculant la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(-0{,}4x + 5) \cdot x - (-0{,}2\,x^2 + 5x - 20)}{x^2} = \frac{-0{,}2x^2 + 20}{x^2}$$

Si imposem que $f'(x) = 0$, obtenim que $x^2 = 100$, que té per solucions $x = 10$ i $x = -10$. Per la naturalesa del nostre problema, només té sentit el valor $x = 10$. Per tant, en el punt d'abscissa $x = 10$ hi ha un extrem relatiu de la funció. A l'interval $(5, 10)$ la funció és creixent perquè $f'(x)$ és positiva, mentre que a l'interval $(10, 20)$ és decreixent perquè la derivada és negativa. Per tant en $x = 10$ hi ha un màxim.

Per a $x = 10$ la funció pren el valor $f(10) = 1$. Per tant, per a $x = 10$ s'obté el benefici màxim i aquest benefici és de 1.000 €.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,5 p. Càlculs: 0,25 p. Obtenir l'interval: 0,5 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció de l'abscissa del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció dels beneficis màxims: 0,25 p.

2.

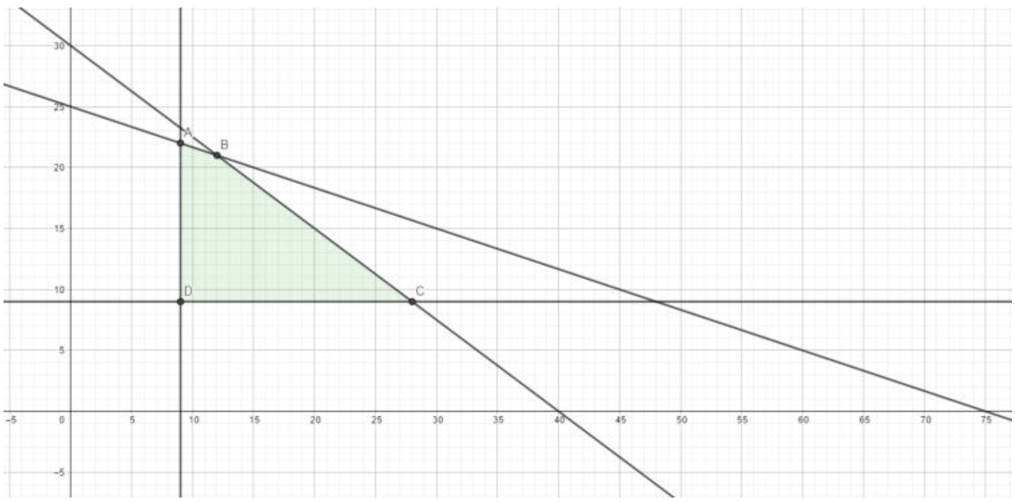
a) Denotem per x el nombre de capsetes del primer tipus, i per y, el nombre de capsetes del segon tipus. El sistema d'inequacions donat per les restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 9 \\ y \geq 9 \\ 3\,x + 4\,y \leq 120 \\ 2\,x + 6\,y \leq 150 \end{cases}$$

Podem simplificar una mica el sistema i treballar amb el sistema següent:

$$\begin{cases} x \geq 9 \\ y \geq 9 \\ 3\,x + 4\,y \leq 120 \\ x + 3\,y \leq 75 \end{cases}$$

La funció objectiu és $F(x, y) = x + y$, que ens dona el nombre total de capsetes, i la volem maximitzar. La regió factible serà:



b) Els vèrtexs de la regió factible són: $A = (9{,}22)$, $B = (12{,}21)$, $C = (28{,}9)$ i $D = (9{,}9)$. Avaluant la funció objectiu als quatre vèrtexs s'obté:

$F(A) = 31$, $F(B) = 33$, $F(C) = 37$ i $F(D) = 18$.

Deduïm, per tant, que per disposar del nombre màxim de capsetes possibles per obsequiar els clients hauran de fer-ne 28 del primer tipus i 9 del segon tipus. En aquest cas, veiem que s'utilitzen tots els panellets de pinyons, ja que $3 \cdot 28 + 4 \cdot 9 = 120$. Dels panellets de coco, en canvi, en fem servir $2 \cdot 28 + 6 \cdot 9 = 110$. Per tant sobren 40 panellets de coco.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim de capsetes: 0,5 p. Obtenció del nombre de panellets que sobren: 0,25 p.

3.

a) Denotarem per x, y i z el nombre d'homes, dones i nens, respectivament, que han assistit a la festa. Obtenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=20 \\ x+y-3z=0 \\ x-y=1 \end{cases}$$

b) El resolem mitjançant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & 19 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Els canvis que hem aplicat en el primer pas han estat $(F1, F2, F3) \rightarrow (F1, F1 - F2, F1 - F3)$. Mentre que en el segon pas hem fet $(F1, F2, F3) \rightarrow (F1, F3, \frac{F2}{4})$.

Deduïm, per tant, que $z = 5$, $2y = 19 - 5$, és a dir, $y = 7$ i, finalment, $x = 20 - 5 - 7$, és a dir, $x = 8$. Per tant, han assistit a la festa 8 homes, 7 dones i 5 nens.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,25 p. cada equació. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,75 p.

4.

a) L'àrea del corral serà donada per l'expressió $A(x, y) = x \cdot y$.

Com que el perímetre està fixat i és de 40 metres, tenim que $2x + 2y = 40$. Aïllant d'aquesta expressió la variable y, obtenim que $y = 20 - x$, i substituint aquesta expressió en la funció àrea A, tenim que:

$$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

b) Com que volem trobar un màxim de la funció $A(x)$, derivarem la funció $A(x)$ i la igualarem a 0.

$A'(x) = 20 - 2x$.

Imposem $A'(x) = 0$ i obtenim $x = 10$ metres. Observem que es tracta d'un màxim perquè la derivada és positiva per a valors inferiors a 10 i és negativa per a valors superiors. Per tant, l'amplària del corral d'àrea màxima és de $x = 10$ metres.

Sabem que la llargària ve donada per l'expressió $y = 20 - x$. Substituint la x per 10, obtenim que $y = 10$ metres.

Deduïm, per tant, que en realitat es tracta d'un quadrat de costat $x = 10$ metres i tindrà per àrea $A(10) = 100\ m^2$.

Criteris de correcció: a) Obtenció de la relació entre l'amplària x i la llargària y: 0,5 p. Obtenció de l'àrea en funció de x: 0,75 p. b) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Càlcul del valor pel qual s'obté el màxim: 0,25 p. Comprovació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Càlcul del valor de la llargària: 0,25 p. Càlcul de l'àrea màxima: 0,25 p.

5.

a) Comencem calculant les diferents potències de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

...

Per tant, deduïm que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, per comprovar si la matriu de l'enunciat és la inversa de la matriu A^n, multipliquem les dues matrius per veure si obtenim la matriu identitat:

$$A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, efectivament, es tracta de la matriu inversa de A^n.

b) Per resoldre l'equació matricial, comencem aïllant la matriu X respectant les normes del producte de matrius:

$$A^{10}X - A^{20} = A \Longrightarrow A^{10}X = A + A^{20} \Longrightarrow X = (A^{10})^{-1}(A + A^{20}).$$

Utilitzant el que hem vist a l'apartat anterior, tenim, per tant, que:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: a) Obtenció de l'expressió de A^n: 0,75 p. Comprovació que es tracta de la matriu inversa de A^n: 0,5 p. b) Aïllar l'equació matricial: 0,5 p. Càlculs dels productes de matrius: 0,5 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.

6.

a) Comencem calculant la derivada $f'(x) = 12x^2 + 2ax$. Si en el punt d'abscissa $x = -1$ hi ha un extrem relatiu, sabem que la derivada en aquest punt ha de ser zero. Per tant $f'(-1) = 12(-1)^2 + 2a(-1) = 0 \rightarrow 12 - 2a = 0 \rightarrow a = 6$.

Per tant, obtenim que el paràmetre $a = 6$.

b) Tenim ara $f(x) = 4x^3 + 12x^2 - 2$. Comencem calculant la derivada: $f'(x) = 12x^2 + 24x = 12x(x + 2)$. Si la igualem a zero obtenim dues solucions $x = -2$ i $x = 0$.

Per tant, tenim que:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	funció creixent	màxim	funció decreixent	mínim	funció creixent

Observem que $f(-2) = 14$ i $f(0) = -2$.

Així doncs, la funció és creixent en els intervals $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ i és decreixent en l'interval $(-2,0)$. D'altra banda, té un màxim relatiu en el punt $(-2, 14)$ i un mínim relatiu en el punt $(0, -2)$.

Criteris de correcció: a) Si el plantejament del problema és correcte, encara que hi pugui haver errors de càlcul: 0,5 p. Càlculs: 0,5 p. Obtenció de la solució: 0,25 p. b) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Càlcul dels intervals de creixement i decreixement: 0,5 p. Obtenció dels extrems relatius i classificació: 0,5 p.

SÈRIE 5

PAUTES PER ALS CORRECTORS

RECORDEU:

Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.

Cal arrodonir la nota final de l'examen, no les notes parcials.

Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

1.

a)

El pendent de la recta tangent és $f'(0)$. Comencem per tant calculant la derivada:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}.$$

Per tant, $f'(0) = 2$.

El punt de tangència és (0, f(0)), és a dir (0, 0) i per tant l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en $x = 0$ és $y = 2x$.

b)

Per estudiar la monotonia de $f(x)$ estudiem el signe de la derivada. Per fer-ho, busquem els valors on la derivada pot canviar de signe que, en aquests cas, només són els punts de tall amb l'eix d'abscisses ja que és una funció contínua. Recordem que $f'(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$ i per tant si imposem que s'anul·li tenim $-2x^2 + 2 = 0$ que té per solucions $x = 1$ i $x = -1$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, +\infty)$
$-2x^2 + 2$	$-$	$+$	$-$
$(x^2 + 1)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	funció decreixent	funció creixent	funció decreixent

Per tant, la funció $f(x)$ és creixent a l'interval (-1, 1) i és decreixent a l'interval

(-∞, $-1) \cup (1, \infty)$. D'altra banda, té un mínim relatiu en el punt $(-1, f(-1)) = (-1, -1)$ i un màxim relatiu en el punt $(1, f(1)) = (1,1)$.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del pendent: 0,25 p. Obtenció del punt de tangència: 0,25 p. Obtenció de la recta tangent: 0,25 p.

b) Determinació dels intervals de creixement i de decreixement: 0,5 p. Obtenció dels extrems relatius: 0,75 p.

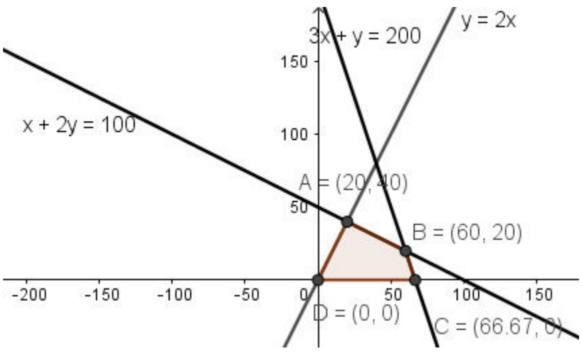
2.

a)

Considerem x = lots venuts de l'oferta *Blava* i y = lots venuts de l'oferta *Groga.*

Tenim les següents restriccions:

$$\begin{cases} 3x + y \le 200 \\ x + 2y \le 100 \\ x \ge (\frac{1}{2})y \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



Finalment, la funció objectiu és $Ingressos(x, y) = 50x + 30y$.

b)

Els vèrtexs de la regió factible són (0,0), $(20{,}40)$, $(60{,}20)$ i $(\frac{200}{3},0)$. Per veure quan obtenim els ingressos màxims calculem el valor de la funció objectiu en els vèrtexs:

$$Ingressos((0{,}0)) = 0\ €,$$

$$Ingressos((20{,}40)) = 50 \cdot 20 + 30 \cdot 40 = 2.200\ €\ ,$$

$$Ingressos((60{,}20)) = 50 \cdot 60 + 30 \cdot 20 = 3.600\ €\ ,$$

$$Ingressos((200/3{,}0)) = 50 \cdot 200/3 + 30 \cdot 0 = 3.333'33\ €\ .$$

Per tant caldrà vendre 60 lots de l'oferta *Blava* i 20 de l'oferta *Groga* i s'obtindrà uns ingressos màxims de 3.600 euros.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0.5p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt pel que s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,5 p.

3.

Considerem les variables següents:

x: import de les vendes a nivell estatal de l'any passat,

y: import de les exportacions a Europa de l'any passat,
z: import de les exportacions a països no comunitaris l'any passat.

S'obté el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 1.800.000 \\ y = x + z \\ 0{,}95\,x + 1{,}15\,y + 1{,}1\,z = 1.950.000 \end{cases}$$

El resolem pel mètode de Gauss, multiplicant la tercera equació per 100:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1.800.000 \\ 95 & 115 & 110 & 195.000.000 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 900.000 \\ 0 & 210 & 15 & 195.000.000 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 900.000 \\ 0 & 0 & 15 & 6.000.000 \end{array}\right)$$

Per tant és un sistema compatible determinat i resolent s'obté x=500.000, $y = 900.000 \; i \; z = 400.000$.

Finalment, aquest any les vendes a nivell estatal han estat de 475.000 euros, les exportacions a Europa de 1.035.000 euros i les exportacions a països no comunitaris de 440.000 euros.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,75 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de les vendes aquest any: 0,75 p.

4.

a)

La temperatura de l'aigua a la superfície serà de $f(0) = 1$ grau centígrad. Per saber a quines profunditats la temperatura és de zero graus hem de resoldre l'equació $f(x) = 0$. Obtenim $x^2 + 5x + 4 = 0$ que té dues solucions, $x = -4$ i $x = -1$. Per tant la temperatura serà de zero graus a 1 metre i a 4 metres de profunditat.

Per obtenir la temperatura a molta profunditat calculem el límit següent:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4} = 1.$$

Per tant, la temperatura límit a molta profunditat serà d'un grau centígrad.

b)

Per calcular a quina fondària s'obté la temperatura mínima comencem calculant la derivada $f'(x) = \frac{(2x+5)(x^2+4)-2x(x^2+5x+4)}{(x^2+4)^2} = \frac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2}$. Si igualem la derivada a zero, $f'(x) = 0$, veiem que la derivada s'anul·la en $x = 2$ i $x = -2$. Per la naturalesa del problema només té sentit $x = -2$. Es tracta d'un mínim perquè la derivada és negativa abans del punt $x = -2$ i es positiva entre $x = -2$ i $x = 2$.
Si calculem $f(-2) = -\frac{1}{4}$, obtenim que la temperatura mínima s'obté a dos metres de profunditat i la temperatura mínima és de $-\frac{1}{4}$ de grau centígrad.

Criteris de correcció:

a) Determinació de la temperatura a la superfície: 0,25 p. Determinació de les profunditats on la temperatura és de zero graus: 0,25 p. Determinació del límit: 0,75 p.

b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del punt on s'obté el mínim: 0,25 p. Justificació de que es tracta d'un mínim: 0,25 p. Obtenció de la temperatura mínima: 0,25 p.

5.

a)

En la primera prova ha consumit 17 litres per recórrer 300 km, per tant la mitjana és de 0,057 litres per km o, equivalentment, 5,7 litres per 100 km.

En la segona prova ha consumit 17,5 litres per recórrer per 350 km, per tant la mitjana és de 0,05 l per km o, equivalentment, 5 litres per 100 km.

b)

Anomenem x = litres consumits per 100 km per carretera i y = litres consumits per 100 km per ciutat. Volem calcular el consum en litres en 400 km per carretera i 150 per ciutat, per tant volem calcular: $4x + 1{,}5y$.

De les dues primeres voltes sabem que

$$\begin{cases} 2x + y = 17 \\ 3x + 0{,}5y = 17{,}5 \end{cases}$$

Resolent el sistema obtenim que x=4,5 i y=8. Per tant el consum que ens demanen és 4·4,5+1,5·8=30 litres.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,25 p. Determinació de la mitjana de les dues primeres proves: 0,5 p. cadascuna. b) Plantejament del problema: 0,5 p. Obtenció de la solució: 0,75 p.

6.

a)

Calculem les matrius que ens demanen:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2 & a^3 \end{pmatrix} \quad \text{i}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 4a^3 & a^4 \end{pmatrix}.$$

b)

Deduïm doncs que en general $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$ i per tant,

$$A^{100} = \begin{pmatrix} a^{100} & 0 \\ 100a^{99} & a^{100} \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: a) Càlcul de les potències de matrius A^2 i A^3: 0,5 p. cadascuna. Càlcul de A^4: 0,25 p.. b) Observar la relació i deducció de la matriu A^{100}: 1,25 p.