SÈRIE 1

1.

a) Sigui x, el nombre de vegades que s'aplica el descompte de 5 €. La funció que dona els ingressos per la venda de bitllets és el producte entre el preu del bitllet i el nombre de bitllets venuts:

$$I(x) = (500 - 5x) \cdot (180 + 2x) = -10x^2 + 100x + 90\,000$$

b) Per trobar el màxim d'ingressos, derivem la funció $I(x)$:
$I'(x) = -20x + 100$.
Igualem la deriva a zero i veiem que hi ha un extrem relatiu quan $x = 5$. Veiem que es tracta d'un màxim, perquè la derivada és positiva per a $x < 5$ i és negativa per a $x > 5$.
Per tant, el preu del bitllet per maximitzar els ingressos ha de ser de $500 - 5 \cdot 5 = 475$ €. I, amb aquest preu, els ingressos de la companyia per la venda de bitllets seran de $I(x) = 475 \cdot 190 = 90\,250$ €.

Criteris de correcció:

a) Obtenció de la funció que dona el preu del bitllet en funció de x: 0,25 punts.
Obtenció de la funció que dona el nombre de passatgers en funció de x: 0,25 punts.
Obtenció de la funció que dona els ingressos en funció de x: 0,5 punts.

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del preu del bitllet: 0,25 punts. Obtenció dels ingressos màxims: 0,25 punts.

2.

a) Cal fer el producte de matrius següent:

$$\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}10 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}60 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 59 \\ 71 \end{pmatrix}$$

Per tant, per al curs vinent cal reservar 15 places de nivell principiant, 59 de nivell intermedi i 71 de nivell avançat.

b) Cal resoldre el sistema següent:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 51 \end{pmatrix}$$

Es pot fer per diversos mètodes, per exemple pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}5 & 0{,}4 & 49 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 51 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 490 \\ 3 & 6 & 510 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 12 & 1\,470 \\ 15 & 30 & 2\,550 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 12 & 1\,470 \\ 0 & 18 & 1\,080 \end{array}\right)$$

I, per tant, $18y = 1\,080$, és a dir, $y = 60$ i $15x + 12 \cdot 60 = 1\,470$, d'on s'obté que $15x = 750$, és a dir, $x = 50$. Així doncs, actualment hi ha 50 alumnes matriculats en l'horari de matí i 60 en l'horari de tarda.

Criteris de correcció:

a) Plantejament: 0,5 punts. Producte de matrius: 0,5 punts. Interpretació del resultat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Resolució: 0,5 punts. Solució final: 0,25 punts.

3.

a) Si anomenem respectivament *x*, *y* i *z* els resultats de cadascuna de les tres proves, podem plantejar el sistema següent:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 6 \\ z = \dfrac{x+y}{2} \end{cases}$$

Escrivint el sistema sense fraccions, i aplicant el mètode de Gauss obtenim:

$$\begin{cases} x+y+z=18 \\ -x-y+2z=0 \end{cases} \xrightarrow{f_1+f_2} \begin{cases} x+y+z=18 \\ 3z=18 \end{cases}$$

Obtenim, per tant, el valor de $z = 6$. Així doncs, la nota de la tercera prova ha estat un 6.

b) Afegint la nova informació, el sistema queda:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 6 \\ z = \dfrac{x+y}{2} \\ \dfrac{y+z}{2} = 7 \end{cases}$$

Escrivint el sistema sense fraccions i aplicant el mètode de Gauss, ens queda:

$$\begin{cases} x+y+z=18 \\ -x-y+2z=0 \\ y+z=14 \end{cases} \xrightarrow{f_1+f_2} \begin{cases} x+y+z=18 \\ 3z=18 \\ y+z=14 \end{cases}$$

Com que tenim un sistema esglaonat, podem resoldre'l fàcilment i obtenim $z = 6, y = 8$ i $x = 4$.
Així doncs, ha obtingut un 4 a la primera prova, un 8 a la segona i un 6 a la tercera.

Criteris de correcció:

a) Escriure el sistema: 0,25 punts per cada una de les dues equacions. Procediment de resolució: 0,5 punts. Trobar el valor correcte de z: 0,25 punts.

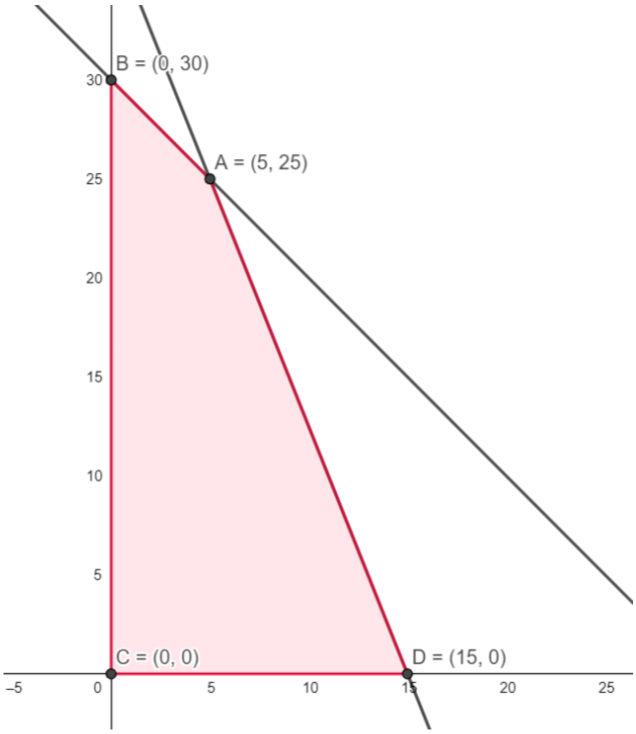
b) Escriure l'equació addicional: 0,25 punts. Procediment de resolució: 0,5 punts. Trobar els valors correctes de x i y: 0,5 punts.

4.

a) Denotem per x el nombre de barques que faran bateigs de submarinisme i per y el nombre de barques que faran excursions per la costa per banyar-se en cales. Les restriccions provenen de la limitació en el nombre d'instructors i d'embarcacions. El sistema d'inequacions determinat per les restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 2y \leq 75 \\ x + y \leq 30 \end{cases}$$

La regió factible serà:



I la funció objectiu és: $F(x,y) = 60 \cdot 10x + 18 \cdot 25y = 600x + 450y$

b) Els vèrtexs de la regió factible són: $A = (5,25), B = (0,30), C = (0,0)$ i $D = (15,0)$. Avaluant la funció objectiu als quatre vèrtexs s'obté:

$F(A) = 14\,250,\quad F(B) = 13\,500\,,\ F(C) = 0$ i $F(D) = \ 9\,000.$

Deduïm, per tant, que per obtenir el màxim d'ingressos caldria fer 5 bateigs de submarinisme i 25 excursions per la costa. Amb aquestes sortides ingressarien 14 250 euros diaris.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de les restriccions: 0,5 punts. Dibuix de la regió factible: 0,5 punts. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 punts.

b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 punts. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Obtenció del màxim d'ingressos: 0,25 punts.

5.

a) Comencem calculant els quilos de menjar que es van gastar els dos dilluns:

$$f(1) = 10\left(-\frac{1^3}{8} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{9 \cdot 1}{2} + 10\right) = \frac{550}{8} = \frac{275}{4} = \ 68{,}75 \text{ kg}$$

$$f(8) = 10\left(-\frac{8^3}{8} + \frac{3 \cdot 8^2}{2} - \frac{9 \cdot 8}{2} + 10\right) = \ 60 \text{ kg}$$

Ara hem de trobar quin dia es van gastar 100 kg de menjar:

$$10\left(-\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10\right) = \ 100 \quad \rightarrow \quad -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10 = 10$$

$$\rightarrow \ -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} = 0 \ \rightarrow \ -t^3 + 12\,t^2 - 36\,t = 0$$

$$\rightarrow \ -t(t^2 - 12\,t + 36\,) = 0 \ \rightarrow \ -t\,(t-6)^2 = 0 \ \rightarrow \ t = 0 \text{ i } t = 6$$

Com que $t\ = 0$ no és del domini d'aquesta funció, la solució és $t = 6$, és a dir, el dissabte es van gastar 100 kg de menjar.

b) Per buscar els extrems relatius de $f(t)$, cal igualar a zero la derivada:

$$f'(t) = 10\left(-\frac{3t^2}{8} + 3\text{t} - \frac{9}{2}\right) = 0 \ \rightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0 \ \rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \ \rightarrow$$

$$(t-6)\cdot(t-2) = 0 \ \rightarrow t = \ 6 \text{ i } t = 2$$

Ara cal comprovar quin és el màxim i quin és el mínim:

	1	(1, 2)	2	(2, 6)	6	(6, 8)	8
$f'(t)$		-	0	+	0	-	
$f(t)$	68,75 kg	Decreix.	Mínim (2, 60)	Creix.	Màxim (6, 100)	Decreix.	60 kg

$$f(2) = 10\left(-\frac{2^3}{8} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \frac{9 \cdot 2}{2} + 10\right) = \ 60\ kg.$$

Els dies que la despesa en menjar va ser més petita són el dia 2 (dimarts) i el dia 8 (dilluns de l'altra setmana), amb 60 kg, i el dia que es va gastar més menjar va ser el dia 6 (dissabte), amb 100 kg.

Criteris de correcció:

a) 0,25 punts per cada imatge i 0,5 punts per l'antiimatge.

b) 0,5 punts per la derivada; 0,25 punts pel càlcul dels extrems relatius; 0,5 punts per estudiar de quin tipus són els extrems relatius i 0,25 punts per observar que en $t = 8$ també s'assoleix el mínim.

6.

a) Sabem que $2y + x = 64$. Per tant, aïllant, obtenim que: $y = \frac{64-x}{2}$

D'altra banda, si $x = 28$, substituint obtenim que: $y = \frac{64-28}{2} = 18 \text{ cm}$

Per tant, la longitud ideal de la contrapetja és de 18 cm.

b) Les inequacions que estableix la normativa són les següents:

$$\begin{cases} x \geq 28 \\ 13 \leq y \leq 18{,}5 \\ 54 \leq 2y + x \leq 70 \end{cases}$$

Així doncs, si $x = 40$, es compleix la primera condició. Pel que fa a la tercera, d'una banda tenim que $2y + 40 \leq 70$, que ens dona que $y \leq 15$. D'altra banda, cal que $2y + 40 \geq 54$, que ens dona que $y \geq 7$.

També sabem que cal que $13 \leq y \leq 18{,}5$. Per tant, ajuntant totes les condicions, sabem que cal que la contrapetja estigui entre 13 i 15 cm.

Criteris de correcció:

a) Escriure la condició en forma d'equació: 0,25 punts. Obtenir y en funció de x: 0, 5 punts. Trobar la longitud de la contrapetja: 0,25 punts.

b) Obtenció de les inequacions: 0,25 punts cadascuna. Treballar bé les desigualtats en el cas concret que $x = 40$: 0, 5 punts. Resultat final: 0,25 punts.