SÈRIE 2

1.

a) Si anomenem x el nombre de persones que han practicat esquí aquàtic, y el nombre de persones que han pràcticat caiac i z el nombre de persones que han practicat moto aquàtica obtenim les equacions següents:

$$x + y + z = 45$$
$$40x + 20y + 60z = 1700$$
$$x = 3y$$

b) Dividim la segona equació per 20 i obtenim el sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 45 \\ 2x + y + 3z = 85 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Resolem el sistema pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 2 & 1 & 3 & 85 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 45 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array}\right)$$

Per tant, tenim que $5z = 25$, és a dir, $z = 5$, $y - 5 = 5$, per tant $y = 10$ i, finalment, $x + 10 + 5 = 45$, és a dir, $x = 30$.

Així doncs 30 persones han fet esquí aquàtic, 10 han fet caiac i 5 moto aquàtica.

Criteris de correcció:

a) Assignació d'incògnites: 0,25 punts. Plantejament: 0,25 punts cada equació correcta.

b) Procediment de resolució del sistema: 1 punt. Obtenció del resultat correcte de les tres incògnites: 0,5 punts.

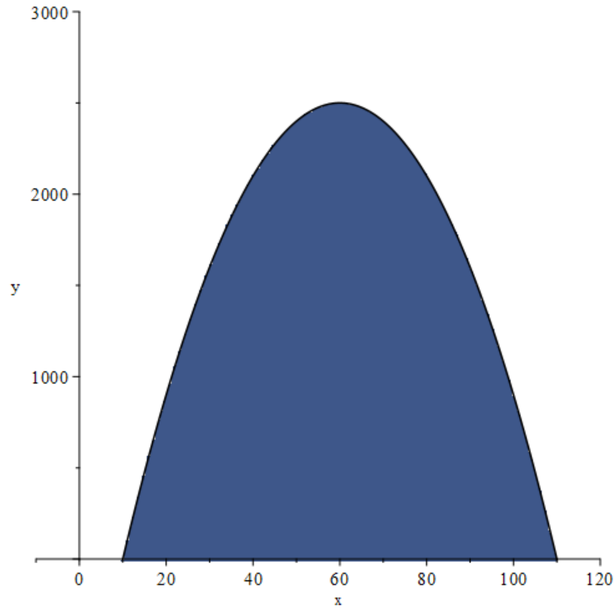
2.

a) Els beneficis de l'empresa venen donats per la diferència entre els ingressos per les vendes i les despeses de producció:

$$f(x) = 35000x - (x^2 + 34880x + 1100) = -x^2 + 120x - 1100$$

Per saber quan la fàbrica no té pèrdues hem de resoldre la inequació següent:

$$-x^2 + 120x - 1100 \geq 0$$



Comencem resolent l'equació $-x^2 + 120x - 1100 = 0$, que té per solucions $x = 10$ i $x = 110$. Com que es tracta d'una paràbola amb el coeficient principal negatiu, la solució de la inequació és $x \in [10,110]$.
Per tant la producció ha d'estar entre 10 i 110 vehicles, ambdós inclosos, per tal de no tenir pèrdues.

b) Per a obtenir el màxim igualem a zero la derivada de la funció que ens dona els beneficis:

$$f'(x) = -2x + 120$$
$$-2x + 120 = 0$$
$$x = 60$$

Per tal de justificar que es tracta d'un màxim podem fer servir la taula de monotonia:

	[0,60)	60	(60,110]
$f'(x)$	Positiu	Zero	Negatiu
$f(x)$	Creixent	Màxim	Decreixent

Per tant, cal fabricar 60 vehicles i el benefici obtingut serà de $f(60) = 2500$ euros.

Criteris de correcció:

a) Trobar la funció que dona els beneficis: 0,5 punts. Resoldre l'equació: 0,5 punts. Justificar que la solució està entre 10 i 100: 0,25 punts.

b) Calcular la derivada: 0,5 punts. Trobar el punt crític: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Calcular el benefici màxim: 0,25 punts.

3.

a) Denotem per x el nombre de caixes tipus A i per y el nombre de caixes tipus B. El sistema d'inequacions donat per les restriccions del problema és el següent:

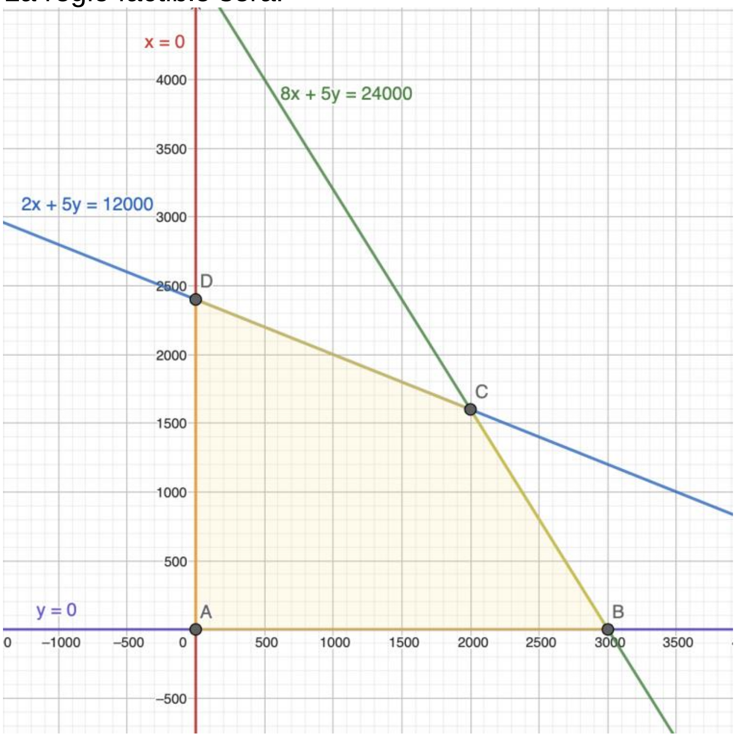
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 5y \leq 24000 \\ 2x + 5y \leq 12000 \end{cases}$$

Els ingressos per la venda d'una caixa del tipus A és: $8 \cdot 0{,}60 + 2 \cdot 0{,}70 = 6{,}2$ €, i els ingressos per la venda d'una caixa del tipus B és: $5 \cdot 0{,}60 + 5 \cdot 0{,}70 = 6{,}5$ €.

Per tant, la funció objectiu, que ens dona els ingressos per la venda de les caixes, és:

$$F(x, y) = 6{,}2x + 6{,}5y$$

La regió factible serà:



b) Els vèrtexs de la regió factible són: $(0{,}0)$, $(3000{,}0)$, $(2000{,}1600)$ i $(0{,}2400)$. Si avaluem la funció objectiu als quatre vèrtexs obtenim:

$$F(0{,}0) = 0$$
$$F(3000{,}0) = 18600$$
$$F(2000{,}1600) = 22800$$
$$F(0{,}2400) = 15600$$

Per tant, els ingressos màxims s'obtenen venent 2.000 caixes del tipus A i 1.600 caixes del tipus B i són de 22.800 €.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de les restriccions: 0,5 punts. Dibuix de la regió factible: 0,5 punts. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 punts.

b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 punts. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Obtenció del benefici màxim: 0,25 punts.

4.

a) Per saber el nombre d'infectats les setmanes 1 i 2 hem de calcular:

$f(1) = \frac{30}{1-2+4} = 10$ milers d'infectats i

$f(2) = \frac{30 \cdot 2}{4-4+4} = 15$ milers d'infectats.

Per saber què passarà a llarg termini hem de calcular el límit

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{30t}{t^2 - 2t + 4} = \lim_{t \to +\infty} \frac{30t}{t^2} = 0$$

Per tant, a llarg termini, la infecció desapareixerà.

b) Per trobar on s'assoleix el màxim comencem calculant la derivada de la funció

$$f'(t) = \frac{120 - 30t^2}{(t^2 - 2t + 4)^2}$$

Si la igualem a zero obtenim com a possibles extrems $t = -2$ (que no té sentit en el context del problema, ja que $t \geq 0$) i $t = 2$.
Com que $f'(1) > 0, f'(3) < 0$ deduïm que el màxim nombre de malalts s'obté quan han passat dues setmanes. És un màxim absolut ja que la funció creix fins a $t = 2$ i decreix a partir d'aquest valor.

El nombre d'infectats aquella setmana és de $f(2) = 15$ milers de persones.

Criteris de correcció:

a) Càlcul del nombre d'infectats la primera i segona setmanes: 0,25 punts cadascun.
Càlcul del límit: 0,5 punts

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del nombre d'infectats aquella setmana: 0,25 punts.

5.

a) Fem el producte de la matriu A per ella mateixa i igualem el resultat a la matriu identitat:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 \\ 0 & 2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observem que cal que $1 + 2a = 1$ i per tant $a = 0$.

b) Per a $a = -1$ fem els càlculs que ens demanen:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(-I) = I.$$

Per tant, d'aquesta última igualtat deduïm que $A^{-1} = A^3 = -A$.
D'altra banda,
$A^{23} = A^{20} \cdot A^3 = (A^4)^5 \cdot A^3 = I \cdot A^3 = A^3 = -A$.

Criteris de correcció:

a) Càlcul A^2: 0,5 punts. Trobar el valor de a: 0,5 punts.

b) Càlcul de A^2, A^3 i A^4: 0,5 punts en total. Deduir el valor de A^{-1}: 0,5 punts. Deduir el valor de A^{23}: 0,5 punts.

6.

a) Amb l'oferta 4×3 el cost de quatre ampolles d'aigua és

$0{,}70 \cdot 3 = 2{,}10$ euros.

Per calcular el preu amb el descompte del 20% comencem calculant el preu normal sense descompte de 4 ampolles

$0{,}70 \cdot 4 = 2{,}80$ euros

I ara restem al resultat un 20%

$2{,}80$ euros – $0{,}20 \cdot 2{,}80$ euros = $2{,}24$ euros

Per tant, aquesta setmana li costaran 2,10 euros i la setmana vinent 2,24 euros.

Anomenem ara x el percentatge de descompte que cal aplicar al total de 2,80 euros per tal d'obtenir 2,10 euros. L'equació que modelitza aquesta situació és la següent:

$$2{,}80 \text{ euros} - 2{,}80 \cdot \frac{x}{100} \text{ euros} = 2{,}10 \text{ euros}$$

$$2{,}80 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 2{,}10$$

$$1 - \frac{x}{100} = \frac{3}{4}$$

$$x = 25$$

Per tant, caldria aplicar un descompte del 25% per igualar l'oferta 4×3.

b) Per saber el descompte que caldria aplicar per igualar una oferta $m \times (m-1)$ igualem el cost d'ambdues promocions per obtenir el percentatge demanat:

$$0{,}70 \cdot m - 0{,}70 \cdot m \cdot \frac{x}{100} = 0{,}70 \cdot (m-1)$$

$$0{,}70 \cdot m \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 0{,}70 \cdot m - 0{,}70$$

$$-0{,}70 \cdot m \cdot \frac{x}{100} = -0{,}70$$

Aïllant la x obtenim $x = \frac{100}{m}$ que és el percentatge que buscàvem.

Criteris de correcció:

a) Càlcul del preu amb l'oferta 4×3: 0,25 punts. Càlcul del preu amb l'oferta del 20%: 0,25 punts. Plantejament de l'equació per a trobar el percentatge: 0,5 punts. Resolució de l'equació i trobar el percentatge que iguala l'oferta: 0,5 punts.

b) Plantejament de la nova equació: 0,5 punts. Resolució: 0,5 punts.