SÈRIE 1

Criteris generals per a la correcció:

1. Les respostes s'han d'ajustar a l'enunciat de la pregunta. En general, es valorarà que l'alume demostri que té clars els conceptes matemàtics sobre els quals tracta cada pregunta.

2. La resolució correcta d'un exercici no pot ser simplement un seguit de càlculs més o menys amuntegats; cal que l'alumne expliqui el que està fent i que acompanyi els càlculs amb comentaris per demostrar que entén el que està fent. Es tindrà en compte la claredat en l'exposició dels conceptes, la descripció dels processos, i els passos a seguir, així com la no confusió d'hipòtesis amb conclusions, l'ordre lògic dels raonaments i la contextualització segons l'enunciat.
   Totes les respostes s'han de raonar i justificar. Una resposta correcta sense raonament ni justificació pot ser valorada amb un 0, si el corrector no és capaç de veure d'on ha sortit el resultat.

3. La resolució que es proposa en aquestes pautes és, en molts casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, si l'estudiant presenta una resolució alternativa, encara que sigui diferent, es comptarà com a totalment vàlida en la mesura que sigui correcta i estigui convenientment justificada. Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.

4. En alguns casos, la solució final de cada apartat pot admetre expressions equivalents; totes es comptaran igualment com a vàlides, a menys que se'n demani una de manera explícita a l'enunciat.

5. Aquestes pautes descriuen com repartir la puntuació assignada de cada apartat a les diferents tasques demanades per aquest (en múltiples de 0,25 punts). La valoració final de cada apartat serà la suma de les parts que l'alumne hagi fet correctament menys la penalització que s'hi hagi d'aplicar d'acord amb les indicacions següents (amb el benentès que cap apartat es pot valorar amb una puntuació negativa).

6. Cal indicar/explicar tots els passos de cada càlcul o argumentació fins arribar a la resposta. Es poden fer els càlculs finals amb calculadora (i donar el resultat final aproximat amb decimals) sempre i quan l'alumne deixi clares les operacions que està fent; en cas contrari, es penalitzarà 0,25 punts del valor total de l'apartat. (per exemple, si dona directament la solució d'un sistema dequacions sense fer cap càlcul).

7. Penalització per errades de càlcul o de transcripció:

   a) Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores no es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.

   b) En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.

   c) En cas que l'errada condueixi a alguna incoherència o a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, sense que l'alumne ho reconegui, aleshores s'aplicarà una penalització de 0,5 punts.

   d) Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà, com a màxim, l'acumulada fins al moment previ a cometre la segona errada.

   e) En el cas que l'error sigui inaceptable (per exemple, simplificar $\sqrt{x^2+y^2}$ com $x+y$, ó $\frac{a+b}{a+c}$ com $\frac{b}{c}$) s'avaluarà tot l'apartat amb un zero.

PAUTES DE CORRECCIÓ

1.

a)

[1 punt]

Derivant i igualant a zero,

$$f'(x) = 2\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = 2\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0,$$

ens queda l'equació $\ln x = 1$; per tant, f té només un punt crític, $x = e$. Resulta que és un màxim ja que la derivada segona és negativa:

$$f''(x) = 2\frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}, \qquad f''(e) = 2\frac{-e}{e^4} = -2e^{-3} < 0.$$

Com que només té un màxim, la funció és creixent a l'interval $(0, e)$ i decreixent a $(e, +\infty)$, cosa que també podem veure directament mirant el signe de la derivada.

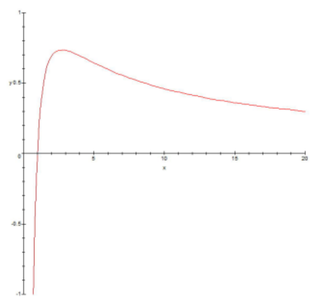
b)

[1 punt]

A zero, hi ha una asímptota vertical, ja que $\lim_{x\to 0^+} 2\frac{\ln(x)}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$. I a infinit, una asímptota horitzontal, cosa que es veu fent l'Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0^+,$$

o bé argumentant que, per a $x>e$ la funció és sempre decreixent, però no travessa mai l'eix d'abscisses, ja que $2\frac{\ln x}{x} = 0$ només té la solució $x = 1$. Aquest és un esbós de la gràfica d'aquesta funció:



c)

[0,5 punts]

Com que $f(1) = 2\frac{\ln 1}{1} = 0$ i $f'(1) = 2\frac{1-\ln 1}{1^2} = 2$, es tracta de la recta que passa pel punt $(1,0)$ i té pendent 2: és la recta $y - 0 = 2(x-1) \quad \longrightarrow \quad y = 2x - 2$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 pel càlcul de la derivada, 0,25 per determinar el màxim i 0,25 per les zones de creixement i decreixement. (b) Compteu 0,25 per l'asímptota vertical, 0,5 per l'horitzontal i 0,25 per l'esbós de la gràfica. (c) Compteu 0,5 pel càlcul correcte de la recta tangent.

Comentari: Si justifiquen l'existència de l'asímptota horitzontal sense calcular el seu valor (per exemple, dient que al tendir a infinit la funció és decreixent sense tallar mai l'eix d'abscisses), o fins i tot dient que és 0 sense justificar, compteu la totalitat dels 0,5 punts corresponents (l'enunciat pregunta si $f(x)$ té asímptotes, no que les calculin).

2.

a)

[1 punt]

La matriu de coeficients i la matriu ampliada del sistema són:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad \overline{M} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & k & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculant el determinant de coeficients i igualant-lo a zero obtenim

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 6k - 3 - 12k = -6k - 6 = 0,$$

és a dir, $k = -1$. Per tant, si $k \neq -1$, tindrem $rang(M) = rang(\overline{M}) = 3$, que coincideix amb el nombre d'incògnites i, pel teorema de Rouché-Frobenius, el sistema és compatible determinat. En canvi, si $k = -1$, el sistema queda

$$\left.\begin{aligned} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{aligned}\right\};$$

com que la tercera equació és la resta de la primera menys la segona, es tracta d'un sistema de dues equacions i tres incònites, amb rang de coeficients 2 ja que $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$-4-2=-6\neq 0$. Per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

La solució per a $k=0$ la podem calcular per la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4&2&-1\\3&-1&0\\1&3&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&2&-1\\1&-1&0\\3&3&0\end{vmatrix}}=\frac{-10}{-6}=\frac{5}{3},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}4&4&-1\\1&3&0\\3&1&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&2&-1\\1&-1&0\\3&3&0\end{vmatrix}}=\frac{8}{-6}=\frac{-4}{3},$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}4&2&4\\1&-1&3\\3&3&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&2&-1\\1&-1&0\\3&3&0\end{vmatrix}}=\frac{-4+18+12+12-36-2}{-6}=0.$$

b)

[0,75 punts]

Per al cas $k=-1$, i eliminant la tercera equació per ser redundant, obtenim

$$\left.\begin{array}{r}4x+2y-z=4\\x-y-z=3\end{array}\right\}.$$

Restant, obtenim $3x+3y=1$. Fent $x=\lambda$, tenim $y=\frac{1}{3}-\lambda$ i llavors $z=x-y-3=\lambda-\frac{1}{3}+\lambda-3=2\lambda-\frac{10}{3}$. Totes les solucions del sistema són, doncs, de la forma

$$(x,y,z)=\left(\lambda,\ \frac{1}{3}-\lambda,\ 2\lambda-\frac{10}{3}\right),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

c)

[0,75 punts]

Com hem notat, en el cas $k=-1$, la tercera equació és redundant perque és la resta de la primera menys la segona. Si modifiquem el terme independent posant, per exemple, $3x+3y=2$ tindrem la incongruència $1=2$ i el sistema serà incompatible.

Dit d'una altra manera, és incompatible perque la matriu de coeficients no ha canviat, i té rang 2, mentre que ara la matriu ampliada té rang 3 ja que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 9 + 12 - 2 = -3 \neq 0.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 pel determinant, 0,25 per la discusió i 0,5 per la solució del cas $k = 0$. (b) Compteu 0,75 per l'expressió paramètrica de totes les solucions. (c) Compteu 0,25 per la nova equació, i 0,5 per la justificació que ara és incompatible.

Comentari: La discussió del sistema i el càlcul de les solucions (tant per a $k = 0$ com per a $k = -1$ pot fer-se d'altres maneres. Compteu-ho bé en la mesura que el que fan sigui correcte i estigui ben justificat.

3.

a)

[1,25 punts]

Tal com es veu al dibuix, les abscisses dels punts $(0,5)$, P, i Q són les tres solucions de l'equació $f(x) = 5$:

$$-x^3 + 7x^2 - 6x + 5 = 5 \quad \longrightarrow \quad x(-x^2 + 7x - 6) = 0$$

$$x = 0, \qquad x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 6. \end{cases}$$

Per tant, les coordenades dels punts demanats són $P = (1,5)$, $Q = (6,5)$, i $R = (6,0)$.

Ara, la recta r que passa pels punts $P = (1,5)$ i $R = (6,0)$ té pendent $m = \frac{0-5}{6-1} = -1$, per tant és $y = -x + n$ i, com que passa pel punt $R = (6,0)$, tenim que $n = 6$; es tracta de la recta $y = -x + 6$.

b)

[1,25 punts]

La superfície del terreny serà la integral definida entre els punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 6$ de la funció $f(x)$ menys la recta:

$$A = \int_1^6 \left(f(x) - r(x)\right) dx =$$

$$= \int_1^6 \left((-x^3 + 7x^2 - 6x + 5) - (-x + 6)\right) dx =$$

$$= \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 5x - 1)\, dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x\right]_1^6 =$$

$$= \left(-\tfrac{6^4}{4} + \tfrac{7}{3}6^3 - \tfrac{5}{2}6^2 - 6\right) - \left(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{7}{3} - \tfrac{5}{2} - 1\right) = \tfrac{1025}{12} = 85.416 \ldots\ u^2.$$

Alternativament, es pot integrar només $f(x)$ entre 1 i 6, i restar el triangle inferior no inclòs al terreny:

$$A = \int_1^6 f(x)\, dx - \tfrac{5 \cdot 5}{2} = \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 6x + 5)\, dx - \tfrac{25}{2} = \left[-\tfrac{x^4}{4} + \tfrac{7}{3}x^3 - 3x^2 + 5x\right]_1^6 - \tfrac{25}{2} = \left(-\tfrac{6^4}{4} + \tfrac{7}{3}6^3 - 3 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6\right) - \left(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{7}{3} - 3 + 5\right) - \tfrac{25}{2} = \tfrac{1175}{12} - \tfrac{25}{2} = 85.416 \ldots\ u^2.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 per plantejar bé l'equació, 0,25 per resoldre-la, 0,25 per donar les coordenades dels tres punts i 0,5 per l'equació de la recta. (b) Compteu 0,5 pel plantejament de la integral correcta i 0,75 per fer-ne el càlcul.

Comentaris: Compteu bé qualsevol de les maneres de fer-ho, si són correctes i estan ben explicades.

4.

a)

- Donat que hi ha dues A i una E, en la primera extracció tenim 3 casos favorables sobre 9 possibles; per tant, la probabilitat demanada és $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
  [0,5 punts]

- Calculem primer la probabilitat que les dues boles siguin iguals. Això només pot passar si són dues A o dues S.

  $$P(dues\ A) = P(primera\ A\ i\ segona\ A) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{36} = P(dues\ S).$$

  Per tant, $P(dues\ diferents) = 1 - P(dues\ iguals) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{17}{18} = 0.944 \ldots$.
  Alternativament, podem argumentar directament de la manera següent: si la primera bola no és ni A ni S, segur que les dues seran diferents; si la primera bola és una A, hi ha 7 boles favorables per a la segona extracció (totes menys l'altra A); i

anàlogament, si la primera bola és una S, hi ha també 7 boles favorables per a la segona extracció. Per tant,

$$P(dues\ diferents) = P(primera\ no\ \text{és}\ ni\ A\ ni\ S) + P(primera\ A\ i\ segona\ no\ A) + P(primera\ S\ i\ segona\ no\ S) =$$
$$= \frac{5}{9} + \frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8} + \frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8} = \frac{17}{18}.$$

[0,75 punts]

b)

El nombre de boles A extretes segueix una llei binomial amb $n = 5$ i $p = \frac{2}{9}$.

- $P(cap\ A) = (1-p)^5 = \left(\frac{7}{9}\right)^5 = 0.284 \ldots$.

  [0,5 punts]

- (ii) Passant al complementari, tenim

  $$P(almenys\ 2\ A) = 1 - P(una\ A) - P(cap\ A) = 1 - \binom{5}{1}\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^4 - \left(\frac{7}{9}\right)^5 =$$
  $$= 0.308 \ldots\ .$$

  [0,75 punts]

Criteris de correcció: (a) (i) Compteu 0,5. (ii) Compteu 0,5 pel plantejament i 0,25 pel càlcul. (b) (i) Compteu 0.5. (ii) Compteu 0,5 pel plantejament i 0,25 per fer-ne el càlcul.

Comentaris: És més llarg però l'apartat (b) (ii) es pot respondre també calculant amb la binomial $P(2A) + P(3A) + P(4A) + P(5A)$; doneu també aquestes respostes com a correctes en la mesura que estiguin ben fetes i ben argumentades.

5.

a)

[1,25 punts]

Com s'indica a l'enunciat, denotem per x la fondària del cobert, i denotem per h l'alçada; l'amplada serà $3x$. El volum del cobert ha de ser de 6 m^3, és a dir, $3x \cdot x \cdot h = 6$ i per tant $h = \frac{2}{x^2}$. El cost de construcció és donat per

$$C(x) = 30 \cdot (3xh + xh + xh) + 50 \cdot 3x^2 + 35 = 150xh + 150x^2 + 35 =$$

$$= 150x \cdot \frac{2}{x^2} + 150x^2 + 35 = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35.$$

b)

[1,25 punts]

Per minimitzar la funció $C(x)$, calculem la seva derivada:

$$C'(x) = \frac{-300}{x^2} + 300x$$

Si resolem l'equació $C'(x) = 0$ obtenim $\frac{300}{x^2} = 300x$ o, equivalentment, $x^3 = 1$, que té com a única solució real $x = 1$. Com que $C''(x) = \frac{600}{x^3} + 300$ i $C''(1) > 0$, comprovem fàcilment que es tracta d'un mínim de la funció. Així doncs, les dimensions del cobert han de ser $x = 1$ metre de fondària, $3x = 3$ metres d'amplada, i $h = \frac{2}{1^2} = 2$ metres d'alçada. Per a aquestes dimensions el cost de construcció és de $C(1) = \frac{300}{1} + 150 \cdot 1^2 + 35 = 485$ euros.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 pel plantejament correcte de les variables (amplada, fondària i alçada), 0,5 per expressar la lligadura que representa el volum fixat, i 0,5 per l'expressió final del cost. (b) Compteu 0,25 per la derivada, 0,25 per aïllar correctament, 0,25 per justificar que es tracta d'un mínim, 0,25 per les tres dimensions demanades i 0,25 pel càlcul del cost total.

Comentaris: Poden plantejar que l'amplada és x i la fondària $\frac{x}{3}$; els càlculs seran diferents però doneu els punts corresponents de cada part sempre que estigui ben feta i ben argumentada. La justificació que es tracta d'un mínim pot fer-se també sense la derivada segona, analitzant el signe de la derivada primera; compteu-ho bé si ho fan així, sempre que estigui ben argumentat.

6.

a)

[1 punt]

El pla buscat ha de ser perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (-3,-2,3) - (1,2,3) = (-4,-4,0) \sim (1,1,0)$, per tant, té equació de la forma $x + y + 0z + D = 0$. A més, ha de passar pel punt mitjà $\frac{1}{2}(A+B) = (-1,0,3)$; per tant, $-1 + D = 0$ i es tracta del pla d'equació $x + y + 1 = 0$.

Geomètricament és clar que aquest pla π està format, precisament pels punts a igual distància de A que de B. Efectivament, per a un punt arbitrari $P = (x,y,z)$, l'equació $d(P,A) = d(P,B)$ és equivalent a

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2},$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9,$$

$$-2x + 1 - 4y = 6x + 9 + 4y,$$

$$-8x - 8y - 8 = 0$$

que simplificant-la és, precisament, l'equació del pla π, $x + y + 1 = 0$.

b)

[0,75 punts]

Usant la fórmula de la distància punt-pla, tenim

$d(A,\pi) = \frac{|1+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $\qquad d(B,\pi) = \frac{|-3-2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$.

No és casualitat que doni el mateix resultat: les projeccions ortogonals de A i de B al pla π són, precisament el punt mitjà $\frac{1}{2}(A+B) = (-1,0,3)$ per on hem fet passar el pla π, perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$.

c)

[0,75 punts]

El punt $C = (-7,6,3)$ compleix $-7 + 6 + 1 = 0$ i per tant pertany al pla π de l'apartat anterior. Això vol dir que $d(C,A) = d(C,B)$ i, per tant, el triangle ABC té almenys dos costats iguals; per tant, és isòsceles.

Per calcular la seva àrea només necessitem la longitud de la base $d(A,B) = 2\frac{4}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$, i la seva alçada, que és la distància de C al punt mitjà entre A i B:

$$h = d\big((-7,6,3),(-1,0,3)\big) = \sqrt{6^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Per tant el triangle ABC té àrea

$$\grave{A}rea = \frac{4\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}}{2} = 24\ u^2.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per calcular l'equació del pla π, i 0,5 per justificar que es tracta exactament dels punts equidistants d'A i de B. (b) Compteu 0,25 per calcular les dues distàncies, i 0,5 per reconèixer que no és casualitat i explicar el motiu pel qual són iguals. (c) Compteu 0,25 per raonar que el triangle és isósceles, 0,25 per calcular l'alçada, i 0,25 per calcular la longitud de la base i l'àrea final.

Comentaris: Poden argumentar que el triangle és isósceles calculant directament la longitud dels tres costats i veient que dues coincideixen; compteu-ho bé si ho fan així, en la mesura que el que facin sigui correcte i estigui ben argumentat.

SÈRIE 5

1.

a)

Com que es tracta d'una funció contínua a l'interval $[1, 1.5]$ i $f(1) = -2 < 0$ i $f(1.5) = -2 + 5\ln 1.5 = 0.027 \ldots > 0$, el Teorema de Bolzano ens assegura que hi ha una arrel a l'interval $(1, 1.5)$. Temptejant altres punts d'aquest interval, veiem que $f(1.3) = -2 + 3\ln 1.3 = -1.212 \ldots < 0$, per tant, l'arrel està a l'interval $[1.3, 1.5]$. I també $f(1.4) = -2 + 4\ln 1.4 = -0.654 \ldots < 0$ i, per tant, l'arrel està a l'interval $[1.4, 1.5]$.

b)

Calculem la derivada $f'(x) = 10\left(\ln x + \frac{x-1}{x}\right)$ i observem que, d'entrada, no sabem aïllar la x de l'equació $f'(x) = 0$. Però es veu clarament que a l'interval $(0,1)$ tenim $\ln x < 0$ i $\frac{x-1}{x} < 0$ per tant, $f'(x) < 0$ i la funció serà decreixent. De la mateixa manera, a l'interval $(1, +\infty)$ tenim $\ln x > 0$ i $\frac{x-1}{x} > 0$ per tant, $f'(x) > 0$ i la funció serà creixent. En conseqüència, $f(x)$ té un únic punt crític al punt $x = 1$, que és mínim, i no té cap màxim.

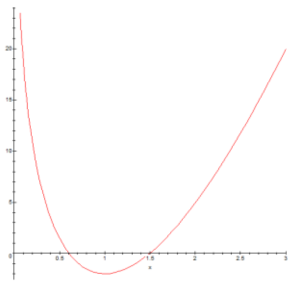
c)

Els dos límits demanats són immediats:

$$\lim_{x \to 0^+} (-2 + 10(x-1)\ln x) = -2 + 10(-1)(-\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} (-2 + 10(x-1)\ln x) = -2 + 10 \cdot (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Tenint en compte totes aquestes dades, la gràfica d'aquesta funció és



Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 per justificar que té una arrel a l'interval $[1, 1{,}5]$ i 0,5 per afinar-lo a una dècima (no importa si fan més o menys temptejos fins arribar a la dècima, mentre siguin correctes). (b) Compteu 0,25 pel càlcul de la derivada, 0,5 per l'estudi del creixement i decreixement, i 0,25 pels màxims i mínims. (c) Compteu 0,25 per cada límit i 0,25 per l'esbós de la gràfica (no s'ha de precisar els talls amb l'eix d'abscisses perquè no s'han calculat, però sí que s'ha de notar que un d'ells està situat entre 1,4 i 1,5).

2.

a)

Calculem el determinant de P:

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - (-1 + 0 + 2) = 1.$$

Com que és diferent de zero, la matriu P és invertible i la seva inversa és

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}(Adj\ P)^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t == \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)

La matriu X la podem trobar aïllant-la de l'equació lineal:

$$PX + Q = 2R,$$

$$PX = 2R - Q,$$

$$P^{-1}PX = P^{-1}(2R - Q),$$

$$X = P^{-1}(2R - Q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\left(2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -8 & -8 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 pel determinant, 0,25 per deduir que P és invertible, i 0,5 pel càlcul de la inversa. (b) Compteu 0,5 per aïllar correctament la X (compteu 0 si multipliquen la P^{-1}pel costat equivocat), i 0,75 pels càlculs i el resultat final.

Comentaris: En cadascun dels apartats, si donen directament el resultat final sense indicar/explicar els passos seguits, compteu 0 punts encara que el resultat sigui correcte (d'aquest problema es pot trobar la resposta amb la calculadora sense entendre res, per això l'enunciat demana explícitament detallar el procediment seguit). Alternativament, la inversa pot calcular-se també pel mètode de Gauss. I, tot i que és més llarg, poden trobar la matriu X plantejant-la amb nou incògnites i buscant-les directament, resolent l'equació corresponent casella per casella. Compteu bé si usen aquests altres mètodes, en la mesura que el que facin sigui correcte i estigui ben explicat.

3.

a)

La derivada és $f_a'(x) = 2ax + 2$ i el pendent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $f_a'(1) = 2a + 2$. Com que el punt de tangència és $\big(1, f_a(1)\big) = (1,7)$, l'equació de la recta tangent serà $y - 7 = (2a + 2)(x - 1)$. Per tal que aquesta recta passi pel punt $(2, 13)$ cal que $13 - 7 = (2a + 2)(2 - 1)$, és a dir, $6 = 2a + 2$ i, per tant, $a = 2$.

(b) Per trobar els punts de tall d'aquestes dues paràboles, hem de resoldre l'equació de segon grau $f_1(x) = f_3(x)$:

$$x^2 + 2x + 4 = 3x^2 + 2x + 2 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Els punts de tall són $\big(1, f_1(1)\big) = (1, 7)$ i $\big(-1, f_1(-1)\big) = (-1, 3)$.

c)

L'àrea demanada és la integral

$$A = \int_{-1}^{1} \big(f_1(x) - f_3(x)\big)\, dx = \int_{-1}^{1} \big((x^2 + 2x + 4) - (3x^2 + 2x + 2)\big)\, dx =$$

$$\int_{-1}^{1} (-2x^2 + 2)\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{1} = \left(-\frac{2}{3} + 2\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{8}{3}\, u^2.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 per la derivada, 0,25 per calcular l'equació de la recta tangent en funció del paràmetre, 0,25 per plantejar l'equació, i 0,25 pel valor final. (b) Compteu 0,25 pel planteig de l'equació correcta i 0,25 per donar els dos punts de tall. (c) Compteu 0,5 per plantejar la integral correcta, i 0,5 per calcular-la (si plantegen la integral de $f_3(x) - f_1(x)$ i els surt un resultat negatiu, cal que expliquin què passa i que prenguin el valor absolut com a resultat; si donen per bo un resultat negatiu, penalitzeu amb 0,5 punts).

4.

a)

Denotem per C l'esdeveniment "la solució és correcta", per R l'esdeveniment "l'ha resolt la Rut", i per I l'esdeveniment "l'ha copiat d'Internet". Segons l'enunciat, $P(R) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(I) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(C \mid R) = 0.75$, i $P(C \mid I) = 0.4$. Aleshores, per la llei de les probabilitats totals,

$$P(C) = P(C \mid R)P(R) + P(C \mid I)P(I) = 0.75 \cdot \frac{2}{3} + 0.4 \cdot \frac{1}{3} = 0.633 \ldots .$$

b)

Fent servir la fórmula de Bayes i els càlculs de l'apartat anterior, obtenim

$$P(R \mid C) = \frac{P(C|R)P(R)}{P(C)} = \frac{0.75 \cdot \frac{2}{3}}{0.633} = 0.789\ldots .$$

c)

El nombre d'exercicis correctes segueix una distribució binomial amb $p = P(C) = 0.633$ i $n = 5$.

$$P(almenys\ 4\ correctes) = P(4\ correctes) + P(5\ correctes) =$$

$$= \binom{5}{4} \cdot 0.633^4 \cdot (1 - 0.633)^1 + \binom{5}{5} \cdot 0.633^5 = 0.396 \ldots$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per plantejar la llei de les probabilitats totals (o per fer l'arbre de decisió), i 0,25 pel càlcul final. (b) Compteu 0,5 per plantejar correctament la fórmula de Bayes (o usar la definició de probabilitat condicionada), i 0,25 pel càlcul final. (c) Compteu 0,5 pel plantejament i 0,5 pel càlcul final.

5.

a)

Tal com s'indica a la figura, el radi de la semicircumferència superior és x, i el de la lateral y. Per tant, el perímetre de la figura serà

$$P(x,y) = 2x + 2y + \frac{2\pi x}{2} + \frac{2\pi y}{2} = (2+\pi)(x+y),$$

i la seva àrea

$$A(x,y) = \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi y^2}{2} + 4xy.$$

b)

Com que volem $P(x,y) = (2+\pi)(x+y) = 10$, tenim $y = \frac{10}{2+\pi} - x$. Substituint a l'expressió de l'àrea, obtenim:

$$A(x) = \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{10}{2+\pi} - x\right)^2 + 4x\left(\frac{10}{2+\pi} - x\right) =$$

$$= \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{10}{2+\pi} - x\right)^2 + \frac{40x}{2+\pi} - 4x^2.$$

Derivant i igualant a zero, obtenim

$$A'(x) = \pi x - \pi\left(\frac{10}{2+\pi} - x\right) + \frac{40}{2+\pi} - 8x = 0$$

$$(2\pi - 8)x = \frac{10\pi - 40}{\pi + 2}$$

$$x = \frac{10\pi - 40}{(\pi+2)(2\pi - 8)} = 0.972\ldots\ m.$$

Ara comprovem que és un màxim, veient que $A'' = 2\pi - 8 < 0$. Per tant, el decorat de la màxima àrea possible és un quadrat de dimensions $x = 0.972\ldots m$, i $y = \frac{10}{2+\pi} - x = 0.972\ldots m$.

Finalment, el valor d'aquesta àrea màxima és $A(0.972) = 6.747\ldots\ m^2$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per l'expressió del perímetre, i 0,5 per la de l'àrea (no importa si el resultat el donen més o menys simplificat). (b) Compteu 0,5 per l'expressió de la funció a derivar, 0,25 per la derivada, 0,25 per la solució, 0,25 per comprovar que és un màxim, i 0,25 per la resposta final.

6.

a)

La recta r té vector director $(4,3,-1)$ i la recta s (2,1,0). No són proporcionals, per tant, les rectes es creuen o es tallen. Donat que aquest determinant és diferent de zero

$$\begin{vmatrix} 5-4 & 4-3 & 3-(-1) \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+16-2-24+1-0 = -9 \neq 0,$$

les rectes r i s es creuen.

Per ser paral·lel a les dues rectes, el pla π té la direcció formada pels seus dos vectors directors; com que, a més, ha de passar pel punt $(0,0,0)$, la seva equació implícita serà

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+4z-2y-6z+x-0 = x-2y-2z = 0.$$

b)

Si partim del vector normal del pla π de l'apartat anterior, $v = (1,-2,-2)$, que és perpendicular a ambdues rectes, podem calcular l'equació del pla π_1 que conté el vector v i la recta r,

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-4 & z-3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -6(x-5)-8(z-3)-(y-4)-3(z-3)-2(x-5)+$$

$$+8(y-4) = -8x+7y-11z+45 = 0,$$

i l'equació del pla π_2 que conté el vector v i la recta s,

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z+1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2(x-4)-4(z+1)+0-(z+1)-0+4(y-3) =$$
$$= -2x+4y-5z-9 = 0.$$

La recta t que busquem és la que té per equació

$$\left.\begin{array}{r} 8x-7y+11z=45 \\ 2x-4y+5z=-9 \end{array}\right\}.$$

Alternativament, podem prendre un punt genèric de la recta r, que és de la forma $R = (5,4,3) + \lambda(4,3,-1)$, i un punt genèric de s, que és de la forma $S = (4,3,-1) + \mu(2,1,0)$, i imposar que el vector

$$\overrightarrow{RS} = (4 + 2\mu, 3 + \mu, -1) - (5 + 4\lambda, 4 + 3\lambda, 3 - \lambda) =$$

$$= (-4\lambda + 2\mu - 1, \qquad -3\lambda + \mu - 1, \qquad \lambda - 4)$$

sigui perpendicular als vectors directors respectius, $(4,3,-1)$ i $(2,1,0)$, de les rectes r i s. Obtenim el sistema d'equacions

$$4(-4\lambda + 2\mu - 1) + 3(-3\lambda + \mu - 1) - (\lambda - 4) = -26\lambda + 11\mu - 3 = 0,$$

$$2(-4\lambda + 2\mu - 1) + 1(-3\lambda + \mu - 1) + 0(\lambda - 4) = -11\lambda + 5\mu - 3 = 0.$$

Resolent-lo, obtenim $\lambda = 2$ i $\mu = 5$, que ens donen els punts buscats $R = (13, 10, 1) \in r$ i $S = (14, 8, -1) \in s$. Efectivament el vector $\overrightarrow{RS} = (1, -2, -2)$ és perpendicular a r i a s (és el vector normal del pla de l'apartat anterior) i l'equació de la recta t que passa per aquests dos punts és

$$\frac{x - 13}{1} = \frac{y - 10}{-2} = \frac{z - 1}{-2}.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per la discussió de la posició relativa i 0,75 per l'equació del pla demanat. (b) Compteu 0,5 pel planteig, i 0,75 per l'equació de la recta perpendicular (ja sigui fet d'una manera o de l'altra... o de qualsevol altra forma mentre sigui correcta i estigui ben explicada).